ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι
(Υποχρεωτικό 3ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ.Σκαρλάτος, Επίκουρος Καθηγητής
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ # 3 : ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Με τον όρο ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου στην ουσία υπονοούμε το έργο που δαπανήθηκε (ή παρήχθει) προκειμένου να συγκροτηθεί η πηγή του πεδίου (που μπορεί να είναι ένα σύνολο διακριτών σημειακών φορτίων ή μια συνεχής κατανομή φορτίου).Το έργο αυτό είναι «αποθηκευμένο» υπό μορφήν δυναμικής ενέργειας της πηγής του πεδίου ή ενέργειας του ηλεκτροστατικού πεδίου που αυτή παράγει και μπορεί να αποδοθεί ξανά στο περιβάλλον ή να καταναλωθεί από εξωτερικό αίτιο κατά τη διάλυση της πηγής «στα εξ ων συνετέθη».

(α) Ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου με πηγή σύνολο διακριτών σημειακών φορτίων. Θα υπολογίσομε την έκφραση που δίδει το συνολικό έργο (παραγόμενο ή καταναλισκόμενο) για την διάλυση μιας πηγής διακριτών σημειακών φορτίων. Σαν παράδειγμα θα επικαλεσθούμε την περίπτωση τεσσάρων σημειακών φορτίων. Το συνολικό παραγόμενο ή καταναλισκόμενο έργο θα ισούται με το άθροισμα των απαιτούμενων έργων για την μεταφορά καθενός φορτίου ξεχωριστά από τη θέση του στην πηγή σε ένα μακρυνό σημείο που θεωρείται το άπειρο.

Για την μεταφορά του πρώτου φορτίου q_4 από τη θέση του r_4 στο άπειρο, θεωρώντας ότι αυτό βρίσκεται στο πεδίο που δημιουργούν τα φορτία q_1, q_2, q_3, θα έχομε ότι :

$$W_4 = q_4 V_{1,2,3}(r_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

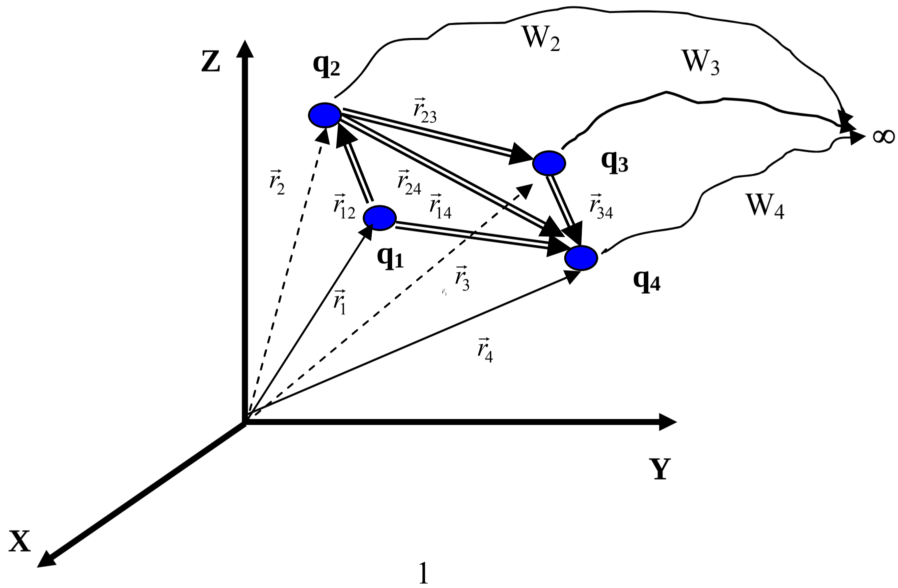
Για την μεταφορά του φορτίου q_3 θα έχομε αντίστοιχα ότι :

$$W_3 = q_3 V_{1,2}(r_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

Για την μεταφορά του φορτίου q_2 θα έχομε αντίστοιχα ότι :

$$W_2 = q_2 V_1(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

Για την μεταφορά του τελευταίου φορτίου q_1 το απαιτούμενο έργο είναι μηδέν, δεδομένου ότι αυτό δεν βρίσκεται πλέον στον χώρο κάποιου εξωτερικού πεδίου. Άρα $W_1=0$.



Αθροίζοντας τα παραπάνω έργα και ανακατανέμοντας τους όρους έχομε ότι :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}}+\frac{q_3}{r_{13}}+\frac{q_4}{r_{14}}\right)+q_2\left(\frac{q_3}{r_{23}}+\frac{q_4}{r_{24}}\right)+q_3\left(\frac{q_4}{r_{34}}\right)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3} q_i \sum_{j>i}^{4}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

Γενικεύοντας για Ν φορτία θα έχομε αντίστοιχα ότι :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Που πρακτικά ισοδυναμεί με :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Η παραπάνω έκφραση για τα τέσσερα φορτία μπορεί να καταστεί πιο πρακτική γράφοντας το συνολικό έργο ως :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}}+\frac{q_3}{r_{13}}+\frac{q_4}{r_{14}}\right)+q_2\left(\frac{q_1}{r_{12}}+\frac{q_3}{r_{23}}+\frac{q_4}{r_{24}}\right)+q_3\left(\frac{q_1}{r_{13}}+\frac{q_2}{r_{23}}+\frac{q_4}{r_{34}}\right)+q_4\left(\frac{q_1}{r_{14}}+\frac{q_2}{r_{24}}+\frac{q_3}{r_{34}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V(r_i)$$

όπου η διαίρεση με το 2 απαιτήθηκε γιατί πήραμε τον όρο του κάθε γινομένου δύο φορές.

Γενικεύοντας τελικά για Ν φορτία θα έχομε ότι :

$$W = U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(r_i) \qquad (\mathrm{A})$$

Έργο για την διάλυση πηγής αποτελούμενης από διάκριτα σημειακά φορτία που ισοδυναμεί με την αποθηκευμένη (δυναμική) ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου της πηγής

Το έργο αυτό μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το εάν παρήχθει ή καταναλώθηκε έργο για την διάλυση της πηγής του πεδίου. Παραγόμενο έργο υποδηλώνει τάση της πηγής για «αυθόρμητη» διάλυση (αντίστοιχα το έργο για την συγκρότησή της είναι αρνητικό και καταναλώθηκε από εξωτερικό αίτιο). Καταναλισκόμενο έργο υποδηλώνει ότι αυτό πρέπει να προσφερθεί από αξωτερικό αίτιο για να διαλυθεί η πηγή (αντίστοιχα το έργο για την συγκρότησή της είναι παραγόμενο και υποδηλώνει τάση για «αυθόρμητη» συγκρότηση της πηγής).

(β) Ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου.

Στην περίπτωση που η πηγή του πεδίου είναι μια τριδιάστατη, διδιάστατη ή μονοδιάστατη συνεχής κατανομή φορτίου με πυκνότητα ρ, σ ή λ αντίστοιχα η άκφραση (Α) παίρνει την μορφή ολοκληρώματος με αντίστοιχες εκφράσεις :

$$U_p = \frac{1}{2}\iiint_{\substack{\text{όγκος}\\ \text{της}\\ \text{κατανομής}}} \rho V d\upsilon \quad (\mathrm{B}),\qquad U_p = \frac{1}{2}\iint_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{της}\\ \text{κατανομής}}} \sigma V dA \quad (\Gamma),\qquad U_p = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{μήκος}\\ \text{της}\\ \text{κατανομής}}} \lambda V d\ell \quad (\Delta)$$

Έργο για την διάλυση πηγής συνεχούς κατανομής φορτίου που ισοδυναμεί με την αποθηκευμένη (δυναμική) ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου της πηγής

Εναλλακτική μορφή της σχέσεως (Β): Η έκφραση (Β) για την ενέργεια τριδιάστατης κατανομής φορτίου μπορεί να εκφρασθεί εναλλακτικά συναρτήσει της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου αντί για του δυναμικού.Συγκεκριμένα θα έχομε ότι :

$$U_p=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\substack{όγκος\\της\\κατανομής}}\rho V d\upsilon \xrightarrow{\rho=\varepsilon_0(\vec{\nabla}\bullet\vec{E})} U_p=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{όγκος\\της\\κατανομής}}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{E}\right)Vd\upsilon \quad \textbf{(1)}$$

Εάν $\vec{B}$ διανυσματική συνάρτηση και f βαθμωτή συνάρτηση είναι γνωστό ότι ισχύει :

$$\vec{\nabla}\bullet(f\vec{B})=f\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{B}\right)+\vec{B}\bullet\left(\vec{\nabla}f\right)$$

Κατά συνέπεια :

$$\iiint\limits_{όγκος}\vec{\nabla}\bullet\left(f\vec{B}\right)d\upsilon=\iiint\limits_{όγκος}f\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{B}\right)d\upsilon+\iiint\limits_{όγκος}\vec{B}\bullet\left(\vec{\nabla}f\right)d\upsilon\overset{Θ.Gauss}{=}\oiint\limits_{επιφανεια}f\left(\vec{B}\bullet d\vec{A}\right)$$

Επομένως :

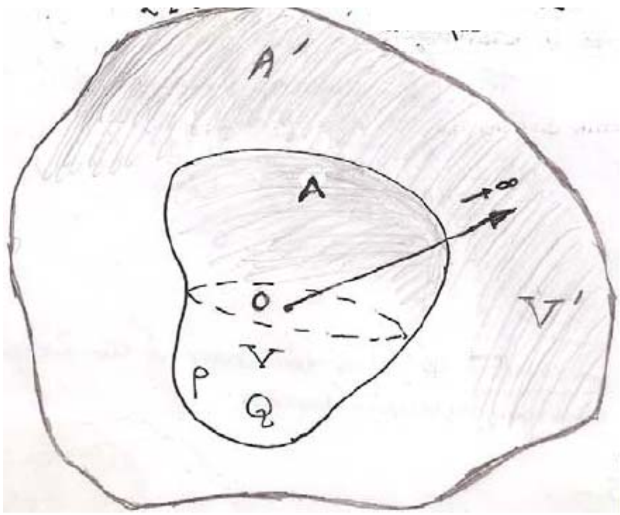
$$\iiint\limits_{όγκος}f\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{B}\right)d\upsilon=-\iiint\limits_{όγκος}\vec{B}\bullet\left(\vec{\nabla}f\right)d\upsilon+\oiint\limits_{επιφανεια}f\left(\vec{B}\bullet d\vec{A}\right)$$

Με βάση αυτή τη γενική έκφραση η σχέση (1) γίνεται :

$$U_p=-\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\iiint\limits_{\substack{όγκος\\της\\κατανομής}}\vec{E}\bullet\left(\vec{\nabla}V\right)d\upsilon+\oiint\limits_{\substack{επιφανεια\\της\\κατανομής}}V\left(\vec{E}\bullet d\vec{A}\right)\right]\xrightarrow{\vec{E}=-\vec{\nabla}V}U_p=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{όγκος\\της\\κατανομής}}E^2d\upsilon+\frac{\varepsilon_0}{2}\oiint\limits_{\substack{επιφανεια\\της\\κατανομής}}V\left(\vec{E}\bullet d\vec{A}\right)$$

(2)

Η παραπάνω έκφραση απαιτεί ολοκλήρωση επάνω στον όγκο της φορτισμένης κατανομής και επάνω στην επιφάνεια που τον περιβάλλει. Εάν όμως επεκτείνομε αυθαίρετα τον όγκο ολοκλήρωσης σε έναν μεγαλύτερο V’ που περικλείεται από μια επιφάνεια A’ που περιβάλλει την κατανομή το αποτέλεσμα της εκφράσεως (1) δεν θα μεταβληθεί διότι ο επιπλέον όγκος δεν περικλείει φορτίο. Κατά συνέπεια και το αποτέλεσμα της ισοδύναμής της (2) δεν θα μεταβληθεί. Τίποτα όμως δεν μας εμποδίζει να επεκτείνομε τον όγκο ολοκλήρωσης στό άπειρο (V’→∞ ή αντίστοιχα A’→∞).



Στην περίπτωση αυτή το επιφανειακό ολοκλήρωμα πέφτει σαν 1/r. Πράγματι σε μεγάλες αποστάσεις
V~1/r
E~1/r^2
A’~r^2
Κατά συνέπεια ολοκληρώνοντας σε όλο το χώρο η συνεισφορά του επιφανειακού ολοκληρώματος της (2) τείνει να γίνει αμελητέα και τελικά έχομε την ισοδύναμη έκφραση :

$$U_p=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{όλος\\ο\\χώρος}}E^2d\upsilon \qquad \text{(E)}$$

Από την έκφραση αυτή προκύπτει ότι η πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια/μονάδα όγκου) του Ηλεκτροστατικού πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου είναι :

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}$$

Παρατήρηση : Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (Α) και (Ε) παρατηρούμε ότι η μεν πρώτη μπορεί να δώσει θετικό ή αρνητικό αποτέλεσμα, όπως έχει αναφερθεί ήδη, ενώ η δεύτερη δίνει πάντα θετικό αποτέλεσμα. Δεδομένου ότι και οι δύο εκφράσεις περιγράφουν το ίδιο φυσικό μέγεθος εμφανίζεται εκ πρώτης όψεως μια αντινομία. Στην πράξη η αντινομία αυτή αίρεται με το εξής σκεπτικό :

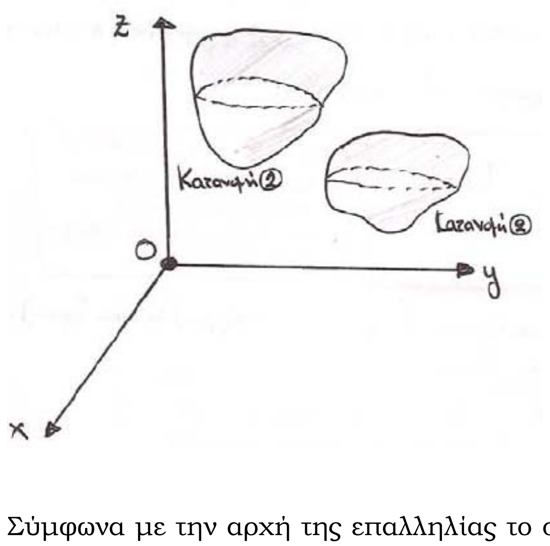
Η έκφραση (Α) υπολογίζει την ενέργεια για την συγκρότηση πηγής συστήματος σημειακών φορτίων αγνοώντας όμως την ενέργεια που απαιτήθηκε για να δημιουργηθεί το κάθε σημειακό φορτίο. Όντως στον πραγματικό κόσμο τα καθαυτό σημειακά φορτία (πχ ηλεκτρόνια, πρωτόνια κλπ) «παραδίδονται» ήδη φορτισμένα. Η ενέργεια που απαιτήθηκε για την δημιουργία τους είναι στην πράξη άπειρη!

Επίσης στην έκφραση (Α) το δυναμικό $V(r_i)$ είναι το δυναμικό στη θέση του φορτίου q_i λόγω της παρουσίας των υπολοίπων φορτίων εκτός του ίδιου του q_i.

Όμως στην έκφραση (Β) και την ισοδύναμή της (Ε) το δυναμικό V είναι το δυναμικό της πλήρους συνεχούς κατανομής φορτίου

(γ) Ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου αλληλεπιδρώντων συνεχών κατανομών φορτίου.

Ένα εύλογο ερώτημα που ανακύπτει είναι ο προσδιορισμός της ενέργειας ενός συστήματος δυο συνεχών κατανομών που συνυπάρχουν στον ίδιο χώρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Μια σκέψη θα ήταν να αθροίσομε απλά τις ενέργειες των δυο κατανομών ξεχωριστά. Η σκέψη αυτή είναι βεβιασμένη και λανθασμένη.



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο λόγω της ύπαρξης και των δύο κατανομών θα είναι :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Κατά συνέπεια με βάση τη σχέση (Ε) θα έχομε ότι :

$$U_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}^2 d\upsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 d\upsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \left(\mathrm{E}_1{}^2 + \mathrm{E}_1{}^2 + 2\vec{E}_1 \bullet \vec{E}_2\right) d\upsilon =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}_1{}^2 d\upsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}_2{}^2 d\upsilon + \varepsilon_0 \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \left(\vec{E}_1 \bullet \vec{E}_2\right) d\upsilon$$

Άρα θα έχομε ότι :

$$U_p = U_{p1} + U_{p2} + \varepsilon_0 \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \left(\vec{E}_1 \bullet \vec{E}_2\right) d\upsilon$$

Όπου

$$U_{p1} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}_1{}^2 d\upsilon =$$ Ενέργεια Κατανομής 1

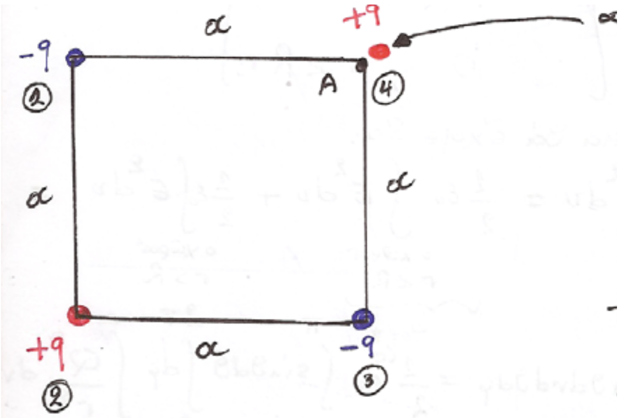
$$U_{p2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}_2{}^2 d\upsilon =$$ Ενέργεια Κατανομής 2

$$\varepsilon_0 \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \left(\vec{E}_1 \bullet \vec{E}_2\right) d\upsilon =$$ Ενέργεια αλληλεπίδρασης των δύο κατανομών

Ο τελευταίος όρος πρακτικά αγνοείται μόνο εάν οι δύο κατανομές είναι πολύ απομακρυσμένες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1 [Griffiths Πρόβλημα 2.31]: (α) Τρία φορτία βρίσκονται στις κορυφές τετραγώνου πλευράς α, όπως στο Σχήμα. Πόσο έργο απαιτείται για να φέρομε ένα ακόμη φορτίο +q στην τέταρτη κορυφή από το άπειρο ;

(β) ποιά είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τεσσάρων φορτίων ; Πόσο είναι το έργο που παρήχθει ή δαπανήθηκε για τη συγκρότηση του συστήματος των τεσσάρων φορτίων ;



Λύση :(α) Το τέταρτο φορτίο φέρεται ουσιαστικά στο πεδίο που δημιουργούν τα άλλα τρία. Αρχικά πρέπει να υπολογίσομε το δυναμικό του πεδίου των τριών φορτίων στην τέταρτη κορυφή του τετραγώνου Α.

$$V_A = V_{A,1} + V_{A,2} + V_{A,3} = K_e \frac{(-q)}{a} + K_e \frac{(q)}{a\sqrt{2}} + K_e \frac{(-q)}{a} = \frac{K_e}{a} q\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

Κατά συνέπεια θα έχομε ότι :

$$W_{A\to\infty} = (+q)V_A = \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) \Rightarrow W_{\infty\to A} = \frac{K_e}{a} q^2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 \text{ (παραγόμενο από το πεδίο)}$$

(β) Θα έχομε ότι :

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V(r_i)$$

όπου :

$$q_1 V(1) = (-q)\left[K_e \frac{(q)}{a} - K_e \frac{(q)}{a\sqrt{2}} + K_e \frac{(q)}{a}\right] = K_e \left[-\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{q^2}{a}\right] = \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$q_2 V(2) = (q)\left[-K_e \frac{(q)}{a} + K_e \frac{(q)}{a\sqrt{2}} - K_e \frac{(q)}{a}\right] = K_e \left[-\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{q^2}{a}\right] = \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$q_3 V(3) = (-q)\left[K_e \frac{(q)}{a} - K_e \frac{(q)}{a\sqrt{2}} + K_e \frac{(q)}{a}\right] = K_e \left[-\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{q^2}{a}\right] = \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$q_4 V(4) = (q)\left[-K_e \frac{(q)}{a} + K_e \frac{(q)}{a\sqrt{2}} - K_e \frac{(q)}{a}\right] = K_e \left[-\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} - \frac{q^2}{a}\right] = \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

Άρα : $U_p = \frac{1}{2} 4 \frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) = 2\frac{K_e}{a} q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) < 0$

Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι αρνητική, γεγονός που υποδηλώνει ότι πρέπει να καταβληθεί έργο από εξωτερικό αίτιο για να διαλυθεί το σύστημα. Το έργο για τη συγκρότηση της πηγής θα είναι : $W = -U_p = 2\frac{K_e}{a} q^2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$.

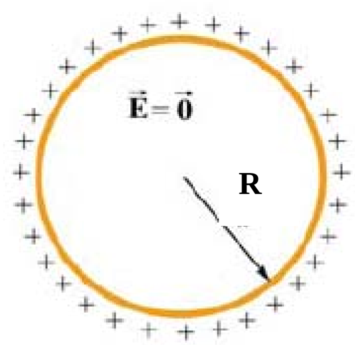
Παράδειγμα 2 : (α) Να υπολογισθεί η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου μιας ομοιόμορφα φορτισμένης με συνολικό φορτίο Q αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R.

(β) Ποιά είναι η ακτίνα R_0 σφαιρικής επιφάνειας μέσα στην οποία βρίσκεται το μισό της ενέργειας του πεδίου ;

(γ) Πόση είναι η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου δυο ομοιόμορφα φορτισμένων αγώγιμων σφαιρών ακτίνων R_1 και R_2 με φορτία Q_1 και Q_2 αντίστοιχα που τα κέντρα τους απέχουν απόσταση r;

Λύση :

(α) Είναι γνωστό ότι η αγώγιμη σφαίρα φορτίζεται μόνο επιφανειακά.



Επίσης είναι γνωστό (υπολογίστηκαν στο μάθημα) ότι η ένταση και το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου μιας ομοιόμορφα φορτισμένης αγώγιμης σφαίρας δίδονται από τις σχέσεις :

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}0 & , r<R \\ K_e\dfrac{Q}{r^2}\hat{r} & , r\geq R\end{cases} \qquad V(r)=\begin{cases}K_e\dfrac{Q}{R} & , r\leq R \\ K_e\dfrac{Q}{r} & , r>R\end{cases}$$

<u>1ος τρόπος :</u> Κάνομε χρήση της σχέσεως (Γ) $U_p=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{της}\\ \text{κατανομής}}}\sigma V dA$, δεδομένου ότι η σφαίρα φορτίζεται μόνο επιφανειακά. Έστω σ η σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της.

$$U_p=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{της}\\ \text{σφαίρας}}}\sigma V dA=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{της}\\ \text{σφαίρας}}}\sigma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}dA=\frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\iint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{της}\\ \text{σφαίρας}}}dA=\frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}(4\pi R^2)=\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sigma 4\pi R^2)=$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}Q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

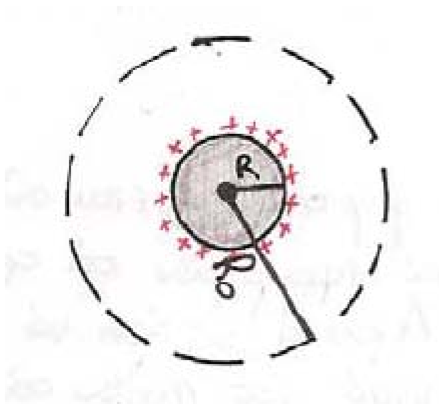
<u>2ος τρόπος :</u> Κάνομε χρήση της σχέσεως (Ε)

$$U_p=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{\text{όλος}\\ \text{ο}\\ \text{χώρος}}}E^2 d\upsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{\text{ο}\\ \text{χώρος}\\ r<R}}E^2 d\upsilon+\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{\text{ο}\\ \text{χώρος}\\ r\geq R}}E^2 d\upsilon=0+\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{\text{ο}\\ \text{χώρος}\\ r\geq R}}E^2 d\upsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{\text{ο}\\ \text{χώρος}\\ r\geq R}}E^2 d\upsilon=$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(K_e\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi=\frac{K_e^{\,2}\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\frac{Q^2}{r^2}dr\int_0^\pi\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{2\pi\varepsilon_0 K_e^{\,2}Q^2}{R}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγομε ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα.

(β) Έστω R_0 η ζητούμενη ακτίνα.



Θα έχομε ότι :

$$U_p(r=R_0)=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_{\substack{o\\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma\\ R\le r\le R_0}} \mathrm{E}^2 d\upsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{R_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(K_e\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$$

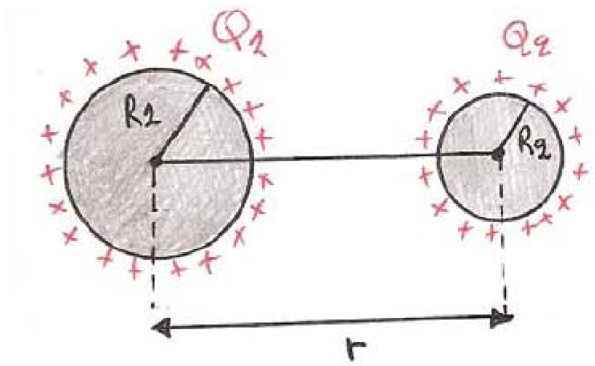
Θα πρέπει όμως :

$$U_p(r=R_0)=\frac{1}{2}U_p\Rightarrow\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow 2R=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\Rightarrow R(R_0-2R)=0\Rightarrow R_0=2R$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου της σφαίρας είναι αποθηκευμένη στον χώρο που την περιβάλλει με το μισό της μέσα στα όρια νοητής ομόκεντρης σφαίρας ακτίνας R_0 που είναι διπλάσια από αυτήν της φορτισμένης σφαίρας.

(δ)Έστω ότι φέρνουμε σε απόσταση r δυο ομοιόμορφα φορτισμένες αγώγιμες σφαίρες ακτίνων R_1 και R_2 με φορτία Q_1 και Q_2 αντίστοιχα, όπως στο Σχήμα. Η ενέργεια του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου (που ισοδυναμεί με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών) θα είναι :

$$U_p=U_{p1}+U_{p2}+\varepsilon_0\iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma\\ o\\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}}\left(\vec{E}_1\bullet\vec{E}_2\right)d\upsilon$$



Η ενέργεια αλληλεπίδρασης των δυο σφαιρών δεν απαιτεί τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Γνωρίζοντας ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει και για σφαιρικές κατανομές φορτίου, η ενέργεια αλληλεπίδρασής τους θα είναι της μορφής που ισχύει για δυο σημειακά φορτία. Δηλαδή :

$$K_e\frac{Q_1Q_2}{r}$$

Κατά συνέπεια :

$$U_p=\frac{Q_1^{\,2}}{8\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2^{\,2}}{8\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r}$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να αγνοηθεί από το άθροισμα εάν $r>>R_1+R_2$