ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι
(Υποχρεωτικό 3ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ.Σκαρλάτος

Προβλήματα Σειρά # 1 : Η ηλεκτρική αλληλεπίδραση

Αντιστοιχεί στα υποκεφάλαια
(α) H1.1 H1.2 και H1.3 των Serway/Jewett
(β) 27.1- 4, 27.5 και 27.6 των Halliday-Resnick-Krane
(γ) 21.1- 3 των Young / Freedman

Τα προβλήματα παρατίθενται με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.
Η ένδειξη ‼ υποδηλώνει πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπισθεί απαραίτητα.

Ι.Γενικά

Πρόβλημα 1.1.Σας δίδονται δυο αρχικά αφόρτιστες πανομοιότυπες μεταλλικές ράβδοι, μια αφόρτιστη ράβδος από εβονίτη, ένα κομμάτι μάλλινο ύφασμα, δύο μονωτικές βάσεις και ένα μονωτικό γάντι. Σκεφθείτε πως μπορείτε να φορτίσετε τις δυο μεταλλικές ράβδους με ίσα και αντίθετα φορτία χρησιμοποιώντας συνδυασμό τεχνικών φόρτισης που αναπτύχθηκαν στο μάθημα.

Πρόβλημα 1.2[Halliday–Resnick-Krane Πρόβλημα 26.14]**.**Υπολογίστε κατά προσέγγιση το μέγεθος του θετικού φορτίου σε ένα ποτήρι νερό 250 cm^3.Το μοριακό βάρος του νερού είναι 18.
[Απ. $13{,}4\text{x}10^6$Cb **]**

ΙΙ.Πυκνότητες φορτίου

‼**Πρόβλημα 1.3.**Να υπολογισθεί το ολικό φορτίο μιας ανομοιόμορφα φορτισμένης πολύ λεπτής ράβδου μήκους L, στην οποία το φορτίο κατανέμεται με γραμμική πυκνότητα:
(α) $\lambda = \lambda_0 x$ Cb/m, λ_0 σταθερά
(β) $\lambda = \dfrac{\lambda_0 x}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$ Cb/m, όπου λ_0 και a σταθερές
ξεκινώντας από το αριστερό της άκρο.
Και στις δυο περιπτώσεις οι ράβδοι κείνται στον x – άξονα. Ελέγξτε εάν τα αποτέλεσματά σας είναι διαστατικά σωστά.
[Απ. (α) $Q = \lambda_0 \dfrac{L^2}{2}$ **(β)** $Q = \lambda_0 a\left(a - \sqrt{a^2 - L^2}\right)$**.**Ελέγξτε τις διαστάσεις των σταθερών **]**

‼**Πρόβλημα 1.4.**Να υπολογισθεί το ολικό φορτίο ενός ανομοιόμορφα φορτισμένου μονωτικού κύβου ακμής ℓ =2m , στον οποίο το φορτίο κατανέμεται με πυκνότητα:

$$\rho = 50x^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right)\ (\mu\text{Cb/m}^3)$$

Θεωρείστε ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων για την αντιμετώπιση του προβλήματος τίθεται στο κέντρο του κύβου.
[Απ. 84,9 μCb**]**

‼**Πρόβλημα 1.5.**(α)Να υπολογισθεί το ολικό φορτίο ενός ανομοιόμορφα φορτισμένου μονωτικού κυκλικού δίσκου ακτίνας R και αμελητέου πάχους, στον οποίο το φορτίο κατανέμεται με επιφανειακή πυκνότητα

$$\sigma = \alpha r\ (\text{Cb/m}^2),\ \ \alpha \text{ σταθερά}$$

Τι αναπαριστά η συγκεκριμένη πυκνότητα φορτίου ; Χρησιμοποιείστε και τους δυο τρόπους που αναπτύχθηκαν στο Παράδειγμα 1.6.
(β) Πως τροποποιείται το αποτέλεσμα εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παρουσιάζει εξάρτηση της μορφής

$$\sigma = \alpha \frac{\sin^2\theta}{2r}\ (\text{Cb/m}^2),\ \alpha \text{ σταθερά}$$

και θ η γωνία μεταξύ της ακτίνας του δακτυλίου, και του σημείου τομής της περιφέρειάς του με τον x-άξονα;

(γ) Πως τροποποιείται το αποτέλεσμα εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου παρουσιάζει εξάρτηση της μορφής

$$\sigma = \alpha \sin\theta \text{ (Cb/m}^2\text{)},\ \alpha \text{ σταθερά}$$

και θ η γωνία μεταξύ της ακτίνας του δακτυλίου, και του σημείου τομής της περιφέρειάς του με τον x-άξονα;
Το αποτέλεσμα θα σας ξενίσει, αλλά δεν είναι παράλογο εάν σκεφθείτε τι αναπαριστά η συγκεκριμένη πυκνότητα φορτίου.
Τέλος ελέγξτε εάν τα αποτέλεσματά σας σε κάθε περίπτωση είναι διαστατικά σωστά.

[Απ. (α) $\frac{2}{3}\pi\alpha R^3$ **(β)** $\frac{\alpha}{2}\pi R$ **(γ)** 0**.**Ελέγξτε τις διαστάσεις της σταθεράς α **]**

Πρόβλημα 1.6.(α) Να υπολογισθεί το ολικό φορτίο μιας ανομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας ακτίνας R, στην οποία το φορτίο κατανέμεται με πυκνότητα:

$$\rho = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^2} e^{-\frac{r}{r_0}} \cos^2\phi \text{ (Cb/m}^3\text{)},\ \rho_0 \text{ και } r_0 \text{ σταθερές}$$

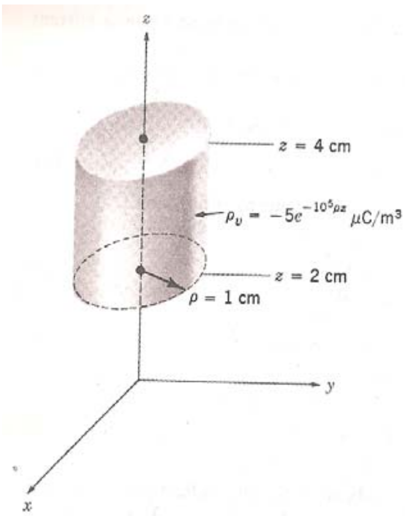
(β) Τι φορτίο περιέχεται σε ομόκεντρες με αυτήν μονωτικές σφαίρες ακτίνας (i) $R=r_0$, (ii) $R=5r_0$ και (iii) $R=\infty$;

[Απ. (α) $6{,}28\rho_0 r_0^3\left[1-e^{-\frac{R}{r_0}}\right]$ **(β) (i)** $3{,}97\rho_0 r_0^3$ **(ii)** $6{,}24\rho_0 r_0^3$ **(iii)** $6{,}28\rho_0 r_0^3$ **]**

●**Πρόβλημα 1.7.**Να υπολογισθεί το ολικό φορτίο του ανομοιόμορφα φορτισμένου μονωτικού κυλίνδρου του σχήματος, στον οποία το φορτίο κατανέμεται με πυκνότητα:

$$\rho_\upsilon = -5\times10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \text{ Cb/m}^3$$

[Υπόδειξη : Λάβετε υπόψιν ότι η συνάρτηση κατανομής του φορτίου είναι πεπλεγμένη ως προς z και ρ.Κατά συνέπεια ολοκληρώνεται ανεξάρτητα ως προς φ, αλλά απαιτεί δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις ως προς z και ρ.**]**
[Απ. Q= -π/40 pCb**]**



III.Ο Νόμος του Coulomb

‼**Πρόβλημα 1.8 (Απλοποιημένη εικόνα του ατόμου του υδρογόνου).** Σε μια απλοποιημένη περιγραφή του ατόμου του υδρογόνου μπορούμε να θεωρήσομε ότι το μοναδικό του ηλεκτρόνιο περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα του διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας r = $5{,}3\times10^{-11}$m.
(α) Υπολογίστε τον λόγο της δύναμης Coulomb μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου του πυρήνα προς την βαρυτική τους έλξη. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων στον μικρόκοσμο ;
(β) Θεωρώντας ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τον πυρήνα υπολογίστε την περίοδο της περιστροφής του και το μέτρο της ορμής του.
[Απ. (α) $F_{el}/F_g = 3\times10^{39}$, **(β)** $T = 1{,}5\times10^{-16}$ sec, $p_e = 20\times10^{-25}$ Kgr m/sec**]**.

‼**Πρόβλημα 1.9.**Με ποιόν τρόπο πρέπει να μοιραστεί συνολικό φορτίο Q σε δύο μικρές μονωτικές σφαίρες ώστε η μεταξύ τους απωστική δύναμη να είναι μέγιστη; Θεωρείστε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των σφαιρών πολύ μεγαλύτερη από το άθροισμα των διαμέτρων τους.
[Απ. $q_1 = q_2 = Q/2$**]**

‼Πρόβλημα 1.10. Φορτία q , 2q, -4q και 2q έχουν τοποθετηθεί στις τέσσερις κορυφές τετραγώνου πλευράς α κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ξεκινώντας από την επάνω αριστερά κορυφή και αριθμούνται ως (1),(2),(3) και (4) αντίστοιχα.
(α) Ποιά είναι η ολική δύναμη που ασκείται στο αρνητικό φορτίο (3) ;
(β) Ποιά είναι η ολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο (1) ;
(γ) Ποιά είναι η ολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο (2);
(δ) Ποιά είναι η ολική δύναμη που ασκείται σε θετικό φορτίο q που τοποθετείται στο κέντρο του τετραγώνου ;

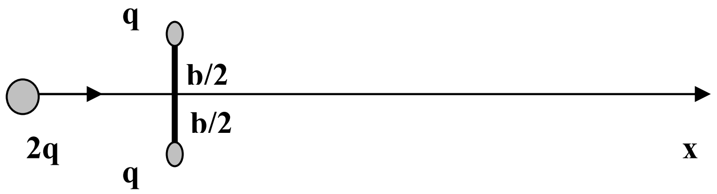
[Απ. (α) $13{,}31K_e\dfrac{q^2}{a^2}$ κατά μήκος της διαγωνίου με φορά προς το (1) **(β)** $0{,}83K_e\dfrac{q^2}{a^2}$ κατά μήκος της διαγωνίου με φορά κατά την προέκταση από το (1) **(γ)** $7{,}55K_e\dfrac{q^2}{a^2}$ σχηματίζοντας γωνία 11^0 με την πλευρά που ενώνει τα (2) και (3) **(δ)** $10K_e\dfrac{q^2}{a^2}$ κατά μήκος της διαγωνίου με φορά προς το (3)**]**

‼Πρόβλημα 1.11. Ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α έχει στις κορυφές του φορτία –q, ενώ στο κέντρο βάρους του θετικό σημειακό φορτίο Q.
(α) Πόση είναι η ολική δύναμη που δέχεται το φορτίο Q;
(β) Ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του φορτίου Q ώστε η συνολική δύναμη σε κάθε αρνητικό φορτίο να είναι μηδέν ;

[Απ. (α) 0 **(β)** $Q=\dfrac{q}{\sqrt{3}}$ **]**

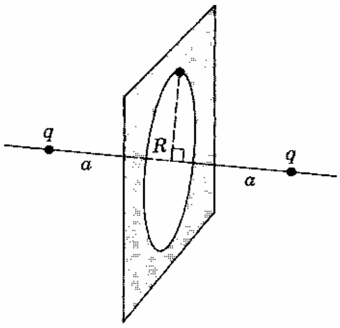
‼Πρόβλημα 1.12. Τέσσερα σημειακά φορτία 20μC βρίσκονται στους άξονες x και y και στις θέσεις ±4 m ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Γράψτε σε διανυσματική μορφή τη συνολική δύναμη που ασκούν σε θετικό σημειακό φορτίο Q =100μC που βρίσκεται στη θέση (0,0,3) m.
[Απ. $\vec{F}=1{,}7\hat{k}\ N$ **]**

‼•Πρόβλημα 1.13. Φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο +2q διέρχεται με σχετικά μεγάλη ταχύτητα από το κέντρο ενός συστήματος δύο σημειακών φορτίων +q που βρίσκονται σε απόσταση b, κινούμενο σε ευθεία γραμμή κάθετα στο μέσον της απόστασης που τα ενώνει. Σε ποιό σημείο της διαδρομής του το σωματίδιο υφίσταται τη μεγαλύτερη δύναμη; Υποθέστε ότι τα δύο φορτία παραμένουν ακίνητα κατά τη διέλευση του σωματιδίου. Θεωρείστε ως αρχή των αξόνων το μέσον της απόστασης b.



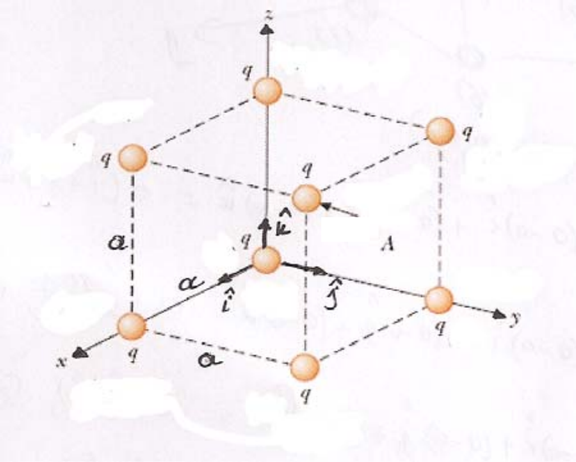
[Απ. x = $\pm\dfrac{b}{2\sqrt{2}}$ **]**

‼•Πρόβλημα 1.14 [Halliday–Resnick-Krane Πρόβλημα 27.19]. Δύο ίσα θετικά σημειακά φορτία q βρίσκονται σε σταθερή μεταξύ τους απόσταση 2α,όπως φαίνεται στο Σχήμα.Ένα σημειακό δοκιμαστικό φορτίο τοποθετείται σε επίπεδο κάθετο στο μέσο της ευθείας που ενώνει τα δύο φορτία.Βρείτε την ακτίνα R του κύκλου σ'αυτό το επίπεδο όπου η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο είναι μέγιστη.



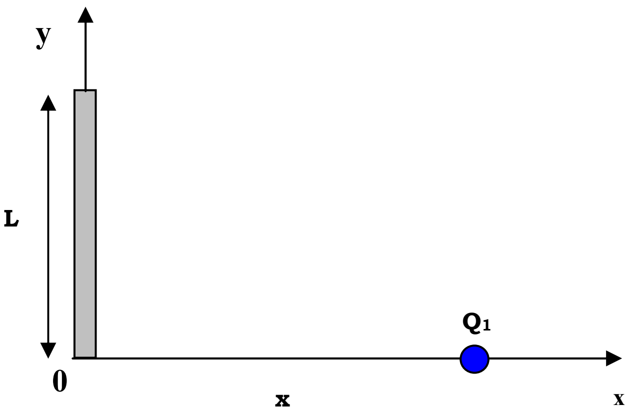
[Απ. $R=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ **]**

‼●**Πρόβλημα 1.15.** Οκτώ σημειακά φορτία +q τοποθετούνται στις κορυφές ενός κύβου ακμής s, όπως στο Σχήμα. Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη (μέτρο,διεύθυνση,φορά) που ασκείται από τα άλλα φορτία σε αυτό που βρίσκεται στην κορυφή A. **[Υπόδειξη :** Με βάση το Σχήμα βρείτε τις συντεταγμένες κάθε φορτίου ως προς την αρχή των αξόνων.]



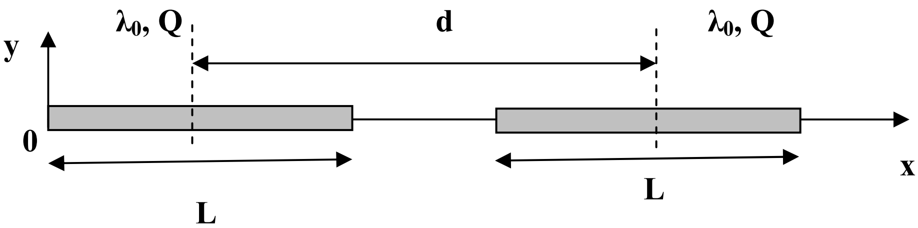
[Απ. $\vec{F} = 1{,}9\dfrac{K_e q^2}{s^2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, $F = 3{,}29\dfrac{K_e q^2}{s^2}$]

‼●**Πρόβλημα 1.16** [Young πρόβλημα 22.39]. Μια ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη πολύ λεπτή ράβδος μήκους L και συνολικού φορτίου Q κατανεμημένου σε αυτήν με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ_0 βρίσκεται κατά μήκος του άξονα y όπως στο Σχήμα. Αρνητικό σημειακό φορτίο Q_1, βρίσκεται στον x – άξονα σε απόσταση x από την αρχή του. Να υπολογισθεί η συνολική δύναμη που δέχεται το σημειακό φορτίο από τη ράβδο.



[Απ. $\vec{F} = -K_e \lambda_0 Q_1 \dfrac{L}{x\sqrt{x^2 + L^2}}\ \hat{i} + K_e \lambda_0 Q_1 \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right]\hat{j}$]

‼●**Πρόβλημα 1.17.** Τα κέντρα δύο ομοιόμορφα θετικά φορτισμένων πολύ λεπτών ράβδων,μήκους L και φορτίου Q κατανεμημένου σε αυτές με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ_0, βρίσκονται σε απόσταση d όπως φαίνεται στο Σχήμα.Να υπολογισθεί η συνολική δύναμη που δέχεται η δεξιά από την αριστερή ράβδο.Τι παρατηρείτε ; Εξετάστε τώρα την περίπτωση όπου d >> L.Τι παρατηρείτε ;



[Υπόδειξη : Θεωρείστε ένα στοιχειώδες τμήμα dx της δεξιάς ράβδου που απέχει απόσταση x από τό άκρο της αριστερής.Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος που λύθηκε στο μάθημα για να εκφράσετε τη στοιχειώδη δύναμη που δέχεται αυτό από την αριστερή ράβδο.Στη συνέχεια ολοκληρώστε κατάλληλα κατά μήκος της δεξιάς ράβδου για να υπολογίσετε την συνολική δύναμη που αυτή δέχεται.] **[Απ.** $\vec{F} = \dfrac{K_e Q^2}{L^2}\ln\left(\dfrac{d^2}{d^2 - L^2}\right)\hat{i}$]