ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Ι

(Υποχρεωτικό 3^{ου} Εξαμήνου)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ, Επίκουρος Καθηγητής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Διηλεκτρικά

5.1 Γενικές Ιδιότητες

5.2 Διηλεκτρικά σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

5.3 Ο Νόμος του Gauss παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

5.4 Ένας κόσμος μέσα σε διηλεκτρικό

5.5 Οριακές συνθήκες παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

5.6 Ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

5.6 Ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

5.7 Πυκνωτές με διηλεκτρικά

5.1 Γενικές Ιδιότητες

Τα διηλεκτρικά (μονωτές) αποτελούν, όπως έχει ήδη αναφερθεί,μία από τις τρείς μεγάλες κατηγορίες υλικών ως προς τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες (οι άλλες δύο είναι οι αγωγοί και οι ημιαγωγοί).Έχουν δε τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

(α) Τα ηλεκτρόνια των ατόμων τους είναι ισχυρά δεσμευμένα σε αυτά.Κατά συνέπεια τα διηλεκτρικά δεν έχουν στη φυσική τους κατάσταση ελεύθερα κινούμενα ηλεκτρόνια στον όγκο τους όπως οι αγωγοί.

(β) Κατά τις διαδικασίες φόρτισής τους το καθαρό (πλεονάζον) φορτίο που προσλαμβάνουν είναι δυνατόν να κατανέμεται (ανάλογα με τον τρόπο φόρτισης) τόσο στην επιφάνεια όσο και στο σύνολο του όγκου τους, σε αντίθεση με τους αγωγούς όπου το πλεονάζον φορτίο κατανέμεται μόνο στην επιφάνειά τους.

(γ) Το πλεονάζον φορτίο ενός διηλεκτρικού δεν μπορεί να κινηθεί ελέυθερα στον όγκο του.Γενικά τα διηλεκτρικά δεν επιτρέπουν, υπό μη καταστροφικές συνθήκες, τη διέλευση φορτίου μέσα από τον όγκο τους.

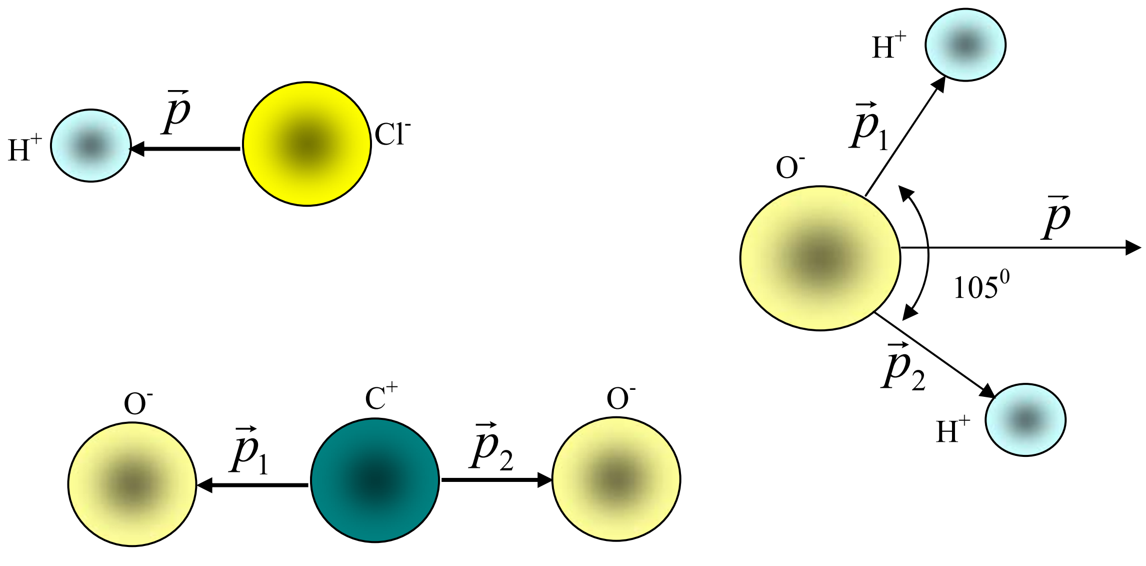
(δ) Στη φυσική τους κατάσταση τα μορια των διηλεκτρικών είναι δυνατόν να εμφανίζουν ή όχι μόνιμες διπολικές ροπές (πολικά και μη πολικά μόρια αντίστοιχα).Χαρακτηριστικά παραδείγματα εικονίζονται στο ακόλουθο Σχήμα 5.1.

Στο μόριο του HCl το μοναδικό ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου βρίσκεται τον περισσότερο χρόνο κινούμενο πιο κοντά στο άτομο του Cl.Έτσι τα κέντρα θετικού και αρνητικού φορτίου του μορίου δεν συμπίπτουν και το μόριο παρουσιάζει μόνιμη διπολική ροπή που κατευθύνεται από το άτομο του Cl σε αυτό του H.

Στο μόριο του H_2O, όπου οι δύο δεσμοί H-O σχηματίζουν γωνία λίγο μεγαλύτερη από 90^0,τα ηλεκτρόνια των ατόμων του υδρογόνου συγκεντρώνονται τον περισσότερο χρόνο γύρω από το άτομο του O που καθίσταται αρνητικότερο σε σχέση με αυτά.Κάθε δεσμός H-O συνεισφέρει μια ηλεκτρική διπολική ροπή.Λόγω συμμετρίας του μορίου η συνισταμένη διπολική ροπή κείται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του μορίου.

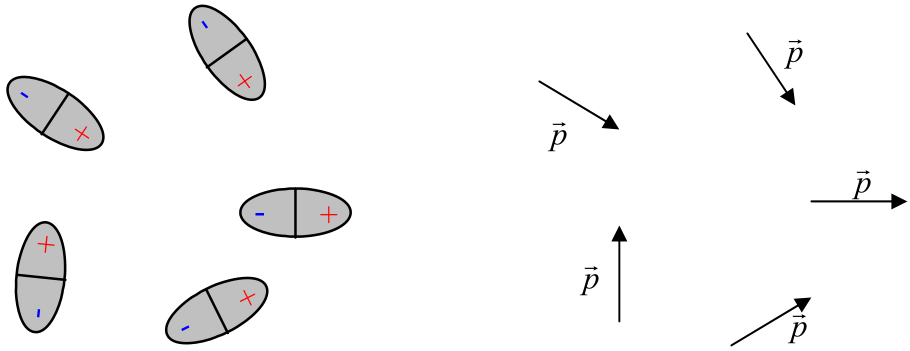
Τέλος στο μόριο του CO_2 κατ' αντιστοιχία οι δύο δεσμοί O-C συνεισφέρουν δύο ίσες και αντίθετες διπολικές ροπές με αποτέλεσμα η συνολική διπολική ροπή του μορίου να είναι μηδέν και αυτό να είναι μη πολικό.

Ο ακόλουθος Πίνακας 5.I δίνει τιμές των διπολικών ροπών χαρακτηριστικών μορίων διηλεκτρικών υλικών.Στα διηλεκτρικά με πολικά μόρια οι προσανατολισμοί των διπολικών ροπών των μορίων είναι τυχαίοι, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 5.2.Τα μόρια αναπαρίστανται ως μικρά δίπολα λόγω της ετεροβαρούς κατανομής του ηλεκτρικού φορτίου σε αυτά.Στην περίπτωση που τα μόρια των διηλεκτρικών είναι μη πολικά αναπαρίστανται σαν τα κέντρα κατανομής του θετικού και αρνητικού τους φορτίου να συμπίπτουν, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 5.3.

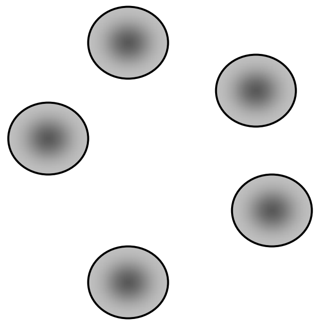


Σχήμα 5.1. *Παραδείγματα πολικών και μη πολικών μορίων διηλεκτρικών.*

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων φορτισμένων διηλεκτρικών που βρίσκονται απομονωμένα στο κενό ή τον αέρα.Το Κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στη συμπεριφορά των διηλεκτρικών υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου όταν αυτά βρίσκονται στο κενό ή τον αέρα.Όπως θα αναδειχθεί στη συνέχεια ο ίδιος φορμαλισμός χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων φορτισμένων σωμάτων που δεν βρίσκονται στο κενό ή τον αέρα, αλλά μέσα σε έναν «κόσμο από διηλεκτρικό».



Σχήμα 5.2. *Δύο ισοδύναμες αναπαραστάσεις πολικών μορίων διηλεκτρικών υλικών.*



Σχήμα 5.3. *Αναπαραστάσεις μη πολικών μορίων διηλεκτρικών υλικών.*

Πίνακας 5.Ι (Διπολικές ροπές διαφόρων πολικών μορίων)

Υλικό (Μόριο)	Φυσικές Ιδιότητες	Διπολική ροπή (Cb m) x10^{-30}
HCl		3,43
HBr		2,6
HI		1,26
CO		0,4
H_2O		6,2
H_2S		5,3
SO_2		5,3
NH3		5
C_2H_5OH		3,66

5.2 Διηλεκτρικά σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

Γενική μακροσκοπική συμπεριφορά.Στην περίπτωση όπου ένα αφόρτιστο διηλεκτρικό υφίσταται την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτριού πεδίου $\vec{E}_{ext}$ στο κενό ή τον αέρα,διακρίνομε δύο βασικές περιπτώσεις που εικονίζονται στο Σχήμα 5.4.

Εάν είναι διηλεκτρικό με μη πολικά μόρια,υπό την επίδραση του εξωτερικού πεδίου τα κέντρα κατανομής θετικού και αρνητικού τους φορτίου διαχωρίζονται και τα μόρια αποκτούν επαγόμενη διπολική ροπή,όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4(α).

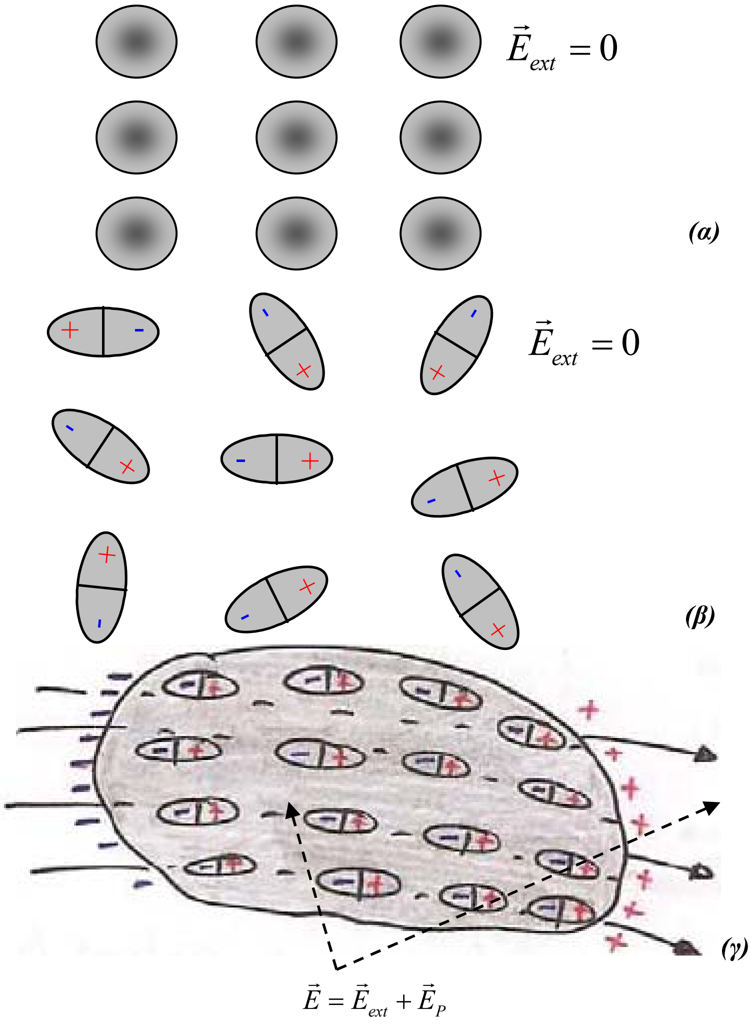
Εάν είναι διηλεκτρικό με πολικά μόρια, υπό την επίδραση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τα μικροσκοπικά αυτά δίπολα τείνουν να προσανατολιστούν παράλληλα προς τις δυναμικές γραμμές του,όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4(β).Ο προσανατολισμός τους εξαρτάται από τρείς βασικούς παράγοντες που είναι :

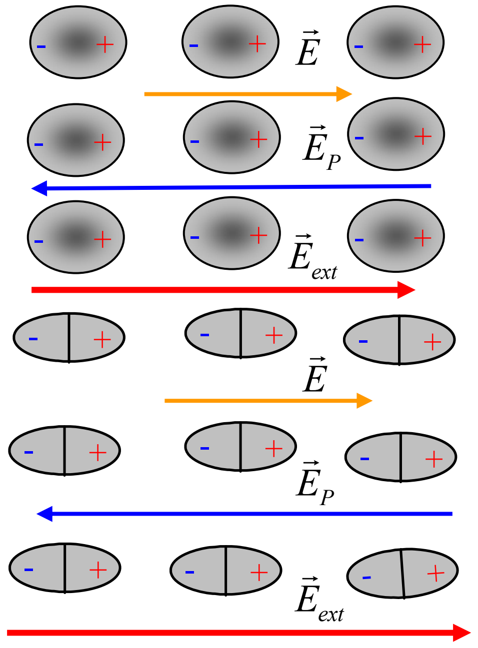
(α) Η δομή των μορίων που καθορίζει και τη μόνιμη διπολική ροπή τους.Αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι η διπολική ροπή ενός ηλεκτρικού διπόλου αποτελεί ουσιαστικά ένα μέτρο του πόσο εύκολα αυτό μπορεί να παραλληλιστεί στις δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου.

(β) Η ένταση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου.

(γ) Η θερμοκρασία του περιβάλλοντος που τείνει να αποπροσανατολίσει τα δίπολα και να επαναφέρει την τυχαιότητα στον προσανατολισμό τους.

Και στις δύο περιπτώσεις η μακροσκοπική εικόνα του υλικού είναι αυτή του Σχήματος 5.4(γ) κατά την οποία εμφανίζεται περίσσεια αρνητικού φορτίου στην μία επιφάνειά του και θετικού φορτίου στην άλλη.Το φαινόμενο είναι μακροσκοπικά ανάλογο με την περίπτωση της ανάπτυξης επαγόμενου φορτίου σε αγωγό που βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο με τη διαφορά ότι η γεννεσιουργός αιτία είναι ριζικά διαφορετική στις δύο περιπτώσεις.Στην περίπτωση των αγωγών η αιτία είναι μετακίνηση ελεύθερου ευκίνητου φορτίου (ηλεκτρονίων) προς την μία πλευρά του με αποτέλεσμα την διαταραχή της τοπικής ουδετερότητάς του.Στην περίπτωση των διηλεκτρικών έχομε ανάπτυξη επιφανειακών φορτίων λόγω προσανατολισμού ολόκληρων των μορίων του ηλικού στα οποία θετικά και αρνητικά φορτία είναι ισχυρά δέσμια.Το υλικό πλέον καθίσταται πρακτι





Σχήμα 5.4. *Επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου σε διηλεκτρικό.(α)Επαγόμενες διπολικές ροπές σε μη πολικά μόρια.(β)Προσανατολισμός πολικών μορίων.(γ)Γενική μακροσκοπική εικόνα του υλικού.*

κά ένα μεγάλο ηλεκτρικό δίπολο.Το φαινόμενο ονομάζεται πόλωση του διηλεκτρικού.Κατά τη διαδικασία της πόλωσης τόσο τα θετικά όσο και τα αρνητικά φορτία του μεγάλου αυτού διπόλου δεν αποχωρίζονται από τα μόρια του υλικού, αλλά παραμένουν δέσμια σε αυτά.Ονομάζονται δε δέσμια φορτία.Εάν το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο παύσει ξαφνικά να εφαρμόζεται, τα περισσότερα διηλεκτρικά επανέρχονται στην αρχική τους κατάσταση με τυχαίους προσανατολισμούς των διπόλων τους (εάν τα μόριά τους είναι πολικά) και με σύπτωση των κέντρων κατανομής θετικού και αρνητικού φορτίου τους (εάν τα μόριά τους είναι μη πολικά).Υπάρχουν όμως και υλικά στα οποία η πόλωση παραμένει και μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου.Τα υλικά αυτά ονομάζονται σιδηροηλεκτρικά.

Στο σημείο αυτό θα επανέλθομε στο Σχήμα 5.4 προκειμένου να διευκρινιστούν κάποια λεπτά σημεία.Η εμφάνιση της πόλωσης στο διηλεκτρικό συνεπάγεται και την ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στο ίδιο το υλικό και έχει αντίθετη φορά από το εξωτερικά εφαρμοζόμενο.Το πεδίο του πολωμένου διηλεκτρικού αναπτύσσεται τόσο μέσα στον όγκο του, όσο και στον περιβάλλοντα χώρο (κενό ή αέρας) και θα συμβολίζεται ως $\vec{E}_P$.Η χωρική του εξάρτηση (ομογενές ή όχι) εξαρτάται τόσο από το υλικό, όσο και από το εξωτερικά εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο (ομογενές ή όχι).Κατά συνέπεια το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου (τόσο μέσα στο υλικό, όσο και στον περιβάλλοντα χώρο) θα είναι το συνιστάμενο πεδίο:

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_P$$

και εν γένει θα είναι ασθενέστερο από το εξωτερικά εφαρμοζόμενο πεδίο λόγω της αντίθετης φορά του πεδίου πολώσεως.

Το φαινόμενο της πόλωσης των διηλεκτρικών περιγράφεται ποσοτικά σε μακροσκοπικό επίπεδο από ένα διάνυσμα που ονομάζεται πόλωση (polarization) και συμβολίζεται ως $\vec{P}$.Εάν $\vec{p}$ είναι η διπολική ροπή (επαγόμενη ή μόνιμη) κάθε μορίου του διηλεκτρικού και Ν το πλήθος των μορίων του ανά μονάδα όγκου (σε m^{-3}), η πόλωση ολόκλητου του διηλεκτρικού ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{P} = N\,\vec{p}\ ,\ \sigma\varepsilon\ \frac{Cbm}{m^3} = \frac{Cb}{m^2}} \quad (5.1)$$

Εν γένει η πόλωση ενός διηλεκτρικού παρουσιάζει εξάρτηση από τη διεύθυνση μέσα στο υλικό.Υπάρχει όμως μία κατηγορία διηλεκτρικών στα οποία η πόλωση είναι ανάλογη του συνολικού εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ (εξωτερικού + πεδίου που παράγεται από το πολωμένο διηλεκτρικό) και δίδεται από τη γενική έκφραση :

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}} \qquad (5.2)$$

Τα υλικά αυτά ονομάζονται **γραμμικά διηλεκτρικά**.Η σταθερά αναλογίας χ_e ονομάζεται ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού και είναι καθαρός θετικός αριθμός.Αποτελεί δε μέτρο της απόκρισης ολόκληρου του υλικού στην εφαρμογή του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου, όπως η διπολική ροπή κάθε μορίου αποτελεί μέτρο της απόκρισης του κάθε μορίου στην εφαρμογή του πεδίου.Ο ακόλουθος Πίνακας 5.ΙΙ δίδει χαρακτηριστικές τιμές επιδεκτικότητας για διάφορα γραμμικά διηλεκτρικά.

Πίνακας 5.ΙΙ (Ηλεκτρική επιδεκτικότητα γραμμικών διηλεκτρικών)

Υλικό	*Φυσικές Ιδιότητες*	χ_e
Mica	Στερεό	5
Πορσελάνη	Στερεό	6
Γυαλί	Στερεό	8
Βακελίτης	Στερεό	4,7
H_2O	Υγρό	78
Λάδι	Υγρό	1,1
Βενζίνη	Υγρό	1,84
Οινόπνευμα	Υγρό	24
Αέρας	(Σε πίεση 1 atm και στους 20^{0}C)	5,4x10^{-4}
CO_2	Αέριο. (Σε πίεση 1 atm και στους 20^{0}C)	9,2x10^{-4}

Δυναμικό πολωμένου διηλεκτρικού που βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Θεωρούμε ένα αφόρτιστο διηλεκτρικό που βρίσκεται σε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_{ext}$ και είναι κατά συνέπεια πολωμένο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5.Λόγω της πόλωσής του το διηλεκτρικό αναπτύσσει και αυτό ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_P$ που συντίθεται με το εξωτερικά εφαρμοζόμενο δίνοντας ένα συνολικό πεδίο $\vec{E}=\vec{E}_{ext}+\vec{E}_P$ σε κάθε σημείο του χώρου εντός και εκτός του υλικού.Ένα βασικό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός του συνιστάμενου αυτού ηλεκτρικού πεδίου.Δεδομένου ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί συνήθως να θεωρηθεί γνωστό, το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_P$ που δημιουργεί το ίδιο το πολωμένο διηλεκτρικό τόσο μέσα στον όγκο του όσο και στον περιβάλλοντα χώρο.Για λόγους που θα καταστούν προφανείς στη συνέχεια το πρόβλημα διαχωρίζεται ουσιαστικά σε δύο.

(α)Υπολογισμός του δυναμικού στον περιβάλλοντα χώρο. Θεωρούμε έναν στοιχειώδη όγκο του πολωμένου διηλεκτρικού dυ′ με κέντρο (x′,y′,z′).Εάν η πόλωση του διηλεκτρικού είναι $\vec{P}(\vec{r}\,')$, ο στοιχειώδης αυτός όγκος συμπεριφέρεται μακροσκοπικά σαν ένα δίπολο διπολικής ροπής $\vec{P}d\upsilon$.Θεωρούμε τώρα ένα σημείο P(x,y,z) εξωτερικό του διηλεκτρικού που απέχει απόσταση $\vec{r}$ από τον στοιχειώδη αυτό όγκο.Δεδομένου ότι το δυναμικό ενός διπόλου σε πολύ μεγάλη απόσταση από το κέντρο του δίδεται από την έκφραση

$$V\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet\hat{r}}{r^2}$$

το στοιχειώδες δυναμικό του διπόλου $\vec{P}d\upsilon$ στο σημείο P(x,y,z) θα είναι :

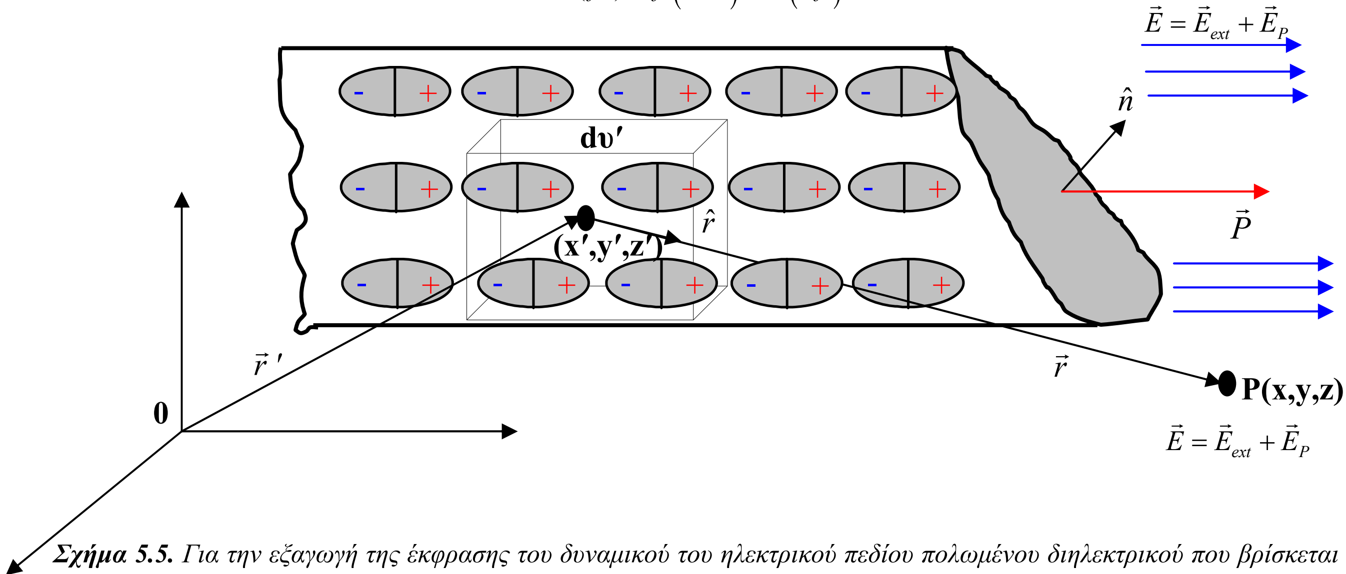
$$dV_P\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\bullet\hat{r}}{r^2}d\upsilon'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{P}\bullet\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\upsilon'$$

Κατά συνέπεια το δυναμικό λόγω της συνεισφοράς ολόκληρου του πολωμένου διηλεκτρικού θα είναι στο σημείο P :

$$\boxed{V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\substack{Ογκος\\Διηλεκτρικού}}\left[\vec{P}\bullet\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\upsilon'}\quad(5.3)$$

Χρησιμοποιώντας την γνωστή ταυτότητα για μία βαθμωτή συνάρτηση f και μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\bullet(f\vec{A})=f\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{A}\right)+\vec{A}\bullet\left(\vec{\nabla}f\right)$$



Σχήμα 5.5. *Για την εξαγωγή της έκφρασης του δυναμικού του ηλεκτρικού πεδίου πολωμένου διηλεκτρικού που βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.*

παίρνομε ότι:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\substack{\text{Ογκος}\\ \text{Διηλεκτρικού}}} \vec{\nabla}'\bullet\vec{P}d\upsilon' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\substack{\text{Ογκος}\\ \text{Διηλεκτρικού}}} \frac{\vec{\nabla}'\bullet\vec{P}}{r}d\upsilon'$$

Με βάση το θεώρημα της αποκλίσεως

$$\iiint\limits_{\text{Ογκος}} (\vec{\nabla}\bullet\vec{F})d\upsilon = \oiint\limits_{\text{Επιφάνεια}} \vec{F}\bullet d\vec{A}$$, όπου $\vec{F}$ διανυσματική συνάρτηση

μπορούμε να μετατρέψομε το πρώτο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσεως σε επιφανειακό παίρνοντας τελικά ότι :

$$\boxed{V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint\limits_{\substack{\text{Επιφάνεια}\\ \text{Διηλεκτρικού}}} \frac{\vec{P}\bullet d\vec{A}'}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\substack{\text{Ογκος}\\ \text{Διηλεκτρικού}}} \frac{\vec{\nabla}'\bullet\vec{P}}{r}d\upsilon'} \quad (5.4)$$

Από την παραπάνω έκφραση φαίνεται ότι το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου ενός πολωμένου διηλεκτρικού προέρχεται από δύο κατανομές δεσμίου φορτίου στο εσωτερικό του:

(i) Μία επιφανειακή κατανομή δεσμίου φορτίου με επιφανειακή πυκνότητα

$$\boxed{\sigma_b = \vec{P}\bullet\hat{n}} \quad Cb/m^2 \ (5.5)$$

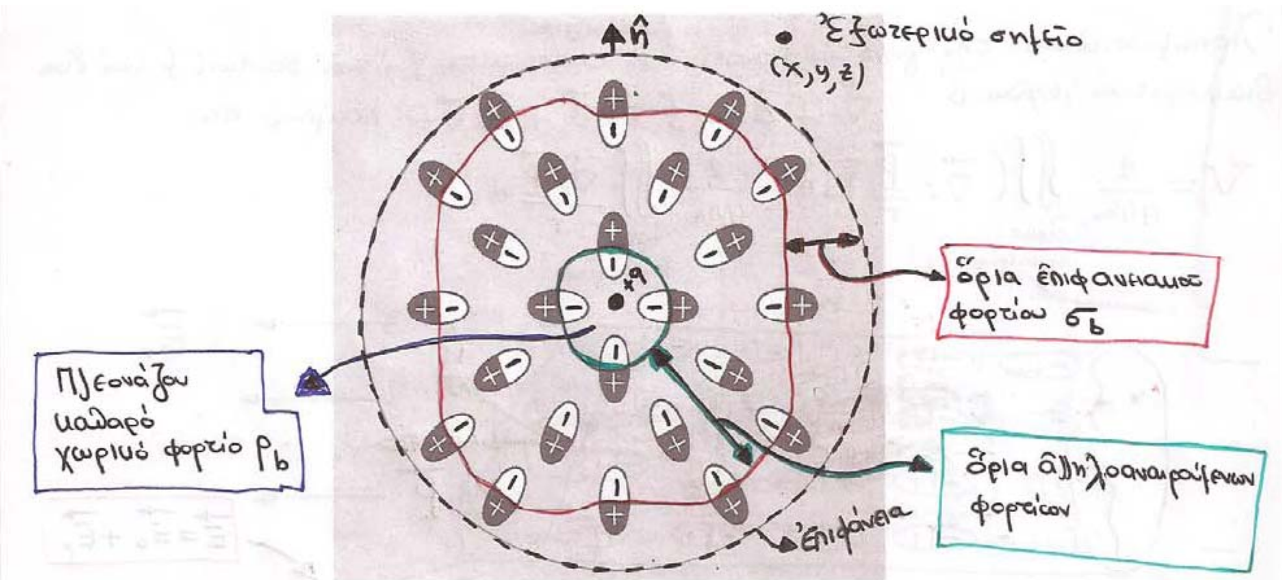
όπου $\hat{n}$ το κάθετο στην επιφάνεια του διηλεκτρικού μοναδιαίο διάνυσμα

(ii) Μία χωρική κατανομή δεσμίου φορτίου με πυκνότητα :

$$\boxed{\rho_b = -\vec{\nabla}\bullet\vec{P}} \quad Cb/m^3 \ (5.6)$$

Η προέλευση των δύο αυτών κατανομών μπορεί να γίνει αντιληπτή με τη βοήθεια του Σχήματος 5.6 που απεικονίζει την πόλωση ενός υγρού διηλεκτρικού λόγω της παρουσίας ενός ελεύθερου σημειακού φορτίου +q στο εσωτερικό του.Η πρώτη συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο του πολωμένου διηλεκτρικού σε ένα εξωτερικό σημείο(x,y,z) έρχεται από το στρώμα του επιφανειακού θετικού δέσμιου φορτίου των ακραίων διπόλων του.Η δεύτερη συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο του πολωμένου διηλεκτρικού στο εξωτερικό σημείο έρχεται από το πλεονάζον καθαρό αρνητικό φορτίο χώρου στον όγκο του που οφείλεται στα δίπολα που περιβάλλουν το σημειακό φορτίο.Το ενδιάμεσο στρώμα είναι ένα στρώμα αλληλοαναιρούμενων φορτίων που δεν συνεισφέρει στο πεδίο του πολωμένου διηλεκτρικού.

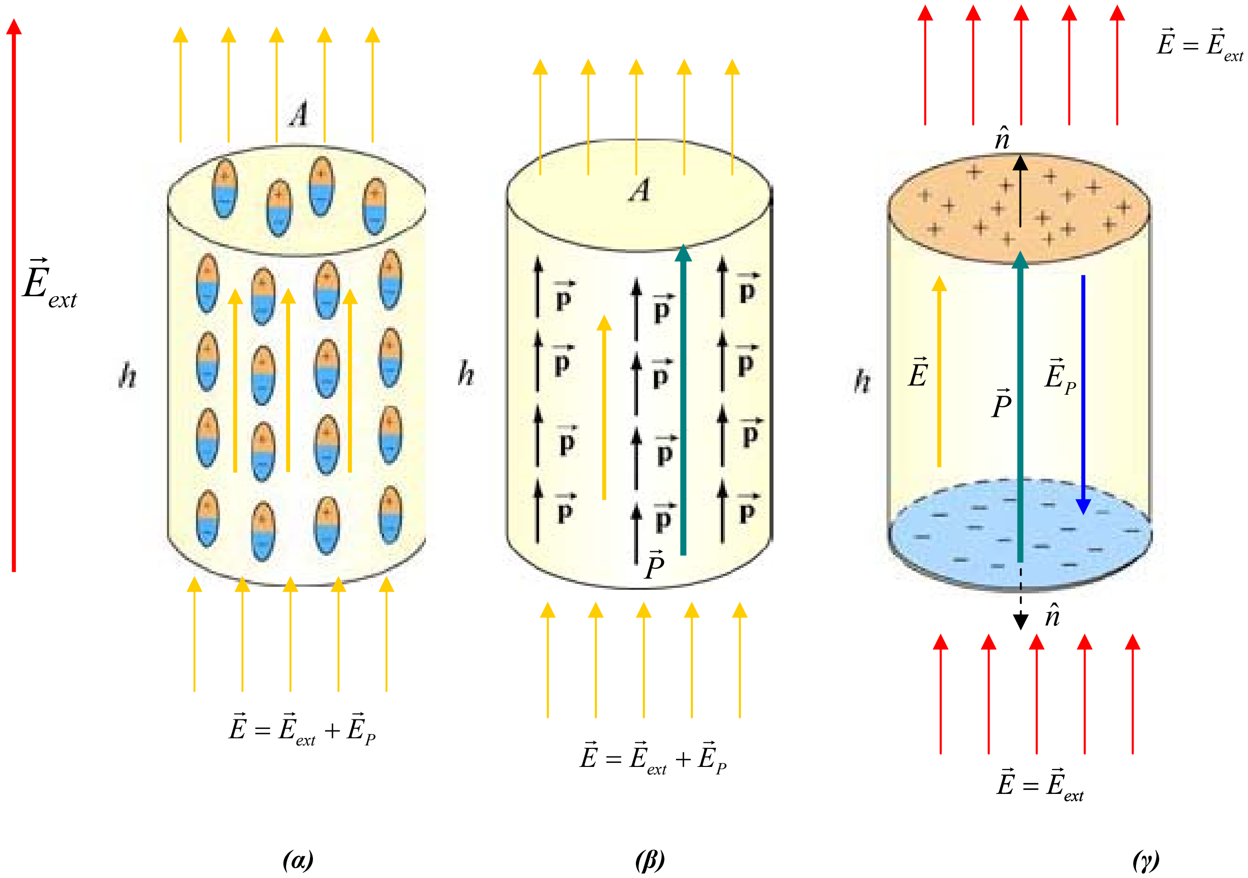
Η έκφραση (5.6) υποδηλώνει ότι **προκειμένου να υπάρχει συνεισφορά χωρικής πυκνότητας δεσμίου φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πολωμένου διηλεκτρικού θα πρέπει η πόλωση του διηλεκτρικού να παρουσιάζει απόκλιση**.



Σχήμα 5.6. *Πόλωση διηλεκτρικού από σημειακό φορτίο στο εσωτερικό του.*

(β)Υπολογισμός του δυναμικού στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Στην περίπτωση όπου θέλομε να υπολογίσομε το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου του πολωμένου διηλεκτρικού στο εσωτερικό του τα πράγματα περιπλέκονται.Το κυριότερο πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι σε ένα εσωτερικό σημείο του υλικού λόγω της εγγύτητας των διπόλων σε αυτό, η προσέγγιση του δυναμικού κάθε ανεξάρτητου διπόλου του υλικού που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη απόδειξη δεν ισχύει γιατί προϋποθέτει ότι r>>α (α είναι η απόσταση μεταξύ των φορτίων του διπόλου).Στην περίπτωση αυτή αυτό που μπορεί να υπολογισθεί είναι ένα μέσο μακροσκοπικό ηλεκτρικό πεδίο πολώσεως μέσα στο υλικό.Ο υπολογισμός είναι εν γένει μή τετριμμένος, αλλά για διηλεκτρικά ειδικής γεωμετρίας και ομοιόμορφα πολωμένα είναι δυνατόν να καταλήξομε σε κλειστές εκφράσεις για το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο.Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο παράδειγμα που απεικονίζει μία υπεραπλουστευμένη περίπτωση.

Εφαρμογή 5.1:Το ηλεκτρικό πεδίο πολώσεως ενός ομοιόμορφα πολωμένου διηλεκτρικού κυλίνδρου. Στο ακόλουθο Σχήμα 5.7 όπου απεικονίζεται ένας κύλινδρος από διηλεκτρικό υλικό σε εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_{ext}$ που τον πολώνει έχοντας ευθυγραμμίσει τις διπολικές ροπές των (έστω) πολικών μορίων του υλικού που κατανέμονται ομοιόμορφα στον όγκο του.Κατά συνέπεια το διηλεκτρικό είναι όπως λέμε ομοιόμορφα πολωμένο.Το πολωμένο υλικό αναπτύσσει ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_P$ μέσα και έξω από τον όγκο του που συντίθεται με το εξωτερικά εφαρμοζόμενο πεδίο δίνοντας ένα συνολικό πεδίο $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_P$ σε κάθε εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7(α).



Σχήμα 5.7. *Ομοιόμορφη πόλωση διηλεκτρικού κυλίνδρου με πολικά μόρια από εξωτερικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.*

Η πόλωση του υλικού έχει μέτρο που δίδεται από την έκφραση

$$P = \frac{Np}{hA}$$, όπου Ν το πλήθος των διπόλων του υλικού

και φορά που εικονίζεται στο Σχήμα 5.7(β) από την μία έως την άλλη άκρη του όγκου του υλικού.Είναι δε χωρικά σταθερή και δεν παρουσιάζει απόκλιση.

Κατά συνέπεια η χωρική πυκνότητα δεσμίου φορτίου είναι μηδέν,όπως εύκολα αποδεικνύεται από τη σχέση $\rho_b = -\vec{\nabla} \bullet \vec{P}$.Αυτό διαπιστώνεται εύκολα αθροίζοντας τα θετικά και αρνητικά φορτία των διπόλων του υλικού στο εσωτερικό του (εξαιρώντας τις δύο επιφάνειες) μέ βάση το Σχήμα 5.7(α).

Το υλικό μακροσκοπικά εμφανίζει δύο επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στις δύο επιφάνειες του κυλίνδρου,όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7(γ) με τιμές:

$\sigma_b = \vec{P} \bullet \hat{n} = Pn\cos 0^0 = P = \frac{Np}{Ah} > 0$ στην επάνω επιφάνεια

$\sigma_b = \vec{P} \bullet \hat{n} = Pn\cos 180^0 = -P = -\frac{Np}{Ah} < 0$ στην κάτω επιφάνεια

Εάν φανταστούμε τις δύο επιφάνειες σαν φορτισμένα επίπεδα με ίσα και αντίθετα φορτία θα έχομε,όπως έχει αποδειχθεί με βάση τον νόμο του Gauss, ότι:

$$\vec{E}_P = \begin{cases} 0 & , \text{έξω} \\ -\frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}\hat{j} = -\frac{P}{\varepsilon_0}\hat{j} = -\frac{Np}{Ah}\hat{j}, & \text{μέσα} \end{cases}$$

Κατά συνέπεια για το συνολικό πεδίο θα έχομε ότι:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_{ext} & , \quad \text{έξω} \\ \vec{E}_{ext} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, & \text{μέσα} \end{cases}$$

Εν γένει ο υπολογισμός του δυναμικού V_P δεν είναι εύκολος.Εάν όμως υπολογισθεί μέσα και έξω από το διηλεκτρικό, το ηλεκτρικό πεδίο πολώσεως υπολογίζεται με τη σειρά του από την σχέση:

$$\vec{E}_P = -\vec{\nabla} V_P$$

Εάν τώρα γνωρίζομε το εξωτερικά εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_{ext}$ (πράγμα όχι σπάνιο) μπορούμε να υπολογίσομε στη συνέχεια το συνολικό πεδίο μέσα και έξω από το διηλεκτρικό από την έκφραση:

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_P$$

Το πρόβλημα εν γένει είναι δύσκολο,αλλά σε περιπτώσεις που παρουσιάζει σφαιρική, κυλινδρική ή συμμετρία επιπέδου είναι εύκολο να αντιμετωπισθεί με την βοήθεια του νόμου του Gauss και την ειδική μορφή που αυτός παίρνει παρουσία πολωμένων γραμμικών διηλεκτρικών.Η εφαρμογή του μας δίνει το συνολικό πεδίο χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός του πεδίου πολώσεως του διηλεκτρικού.

5.3 Ο Νόμος του Gauss παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

Θεωρούμε την περίπτωση ενός αφόρτιστου διηλεκτρικού που βρίσκεται σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από φορτισμένα σώματα που το περιβάλλουν (σημειακά φορτία ή συνεχείς κατανομές φορτίου), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8.Στο σύστημά μας θεωρούμε δύο ειδών φορτία.

•**Τα δέσμια φορτία** που είναι τα φορτία πολώσεως των διπόλων του διηλεκτρικού (επαγόμενα ή προσανατολισμένα μόνιμα δίπολα).

•**Τα ελέυθερα φορτία που** είναι ότι φορτία δεν είναι φορτία πολώσεως και είναι τα σημειακά φορτία ή το φορτίο των συνεχών κατανομών που δημιουργούν το εξωτερικό πεδίο που πολώνει το διηλεκτρικό.

Εάν ρ_b και ρ_f είναι οι αντίστοιχες πυκνότητες δέσμιου και ελέυθερου φορτίου του διηλεκτρικού θα έχομε ότι η συνολική πυκνότητα φορτίου στο χώρο θα είναι:

$$\rho_t = \rho_f + \rho_b$$

Ο νόμος του Gauss για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται τόσο από τα ελέυθερα φορτία που δημιουργούν το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, όσο και από τα φορτία πολώσεως του διηλεκτρικού θα έχει την μορφή:

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0}$$

Όμως $\rho_b = -\vec{\nabla}\bullet\vec{P}$ και επομένως έχομε:

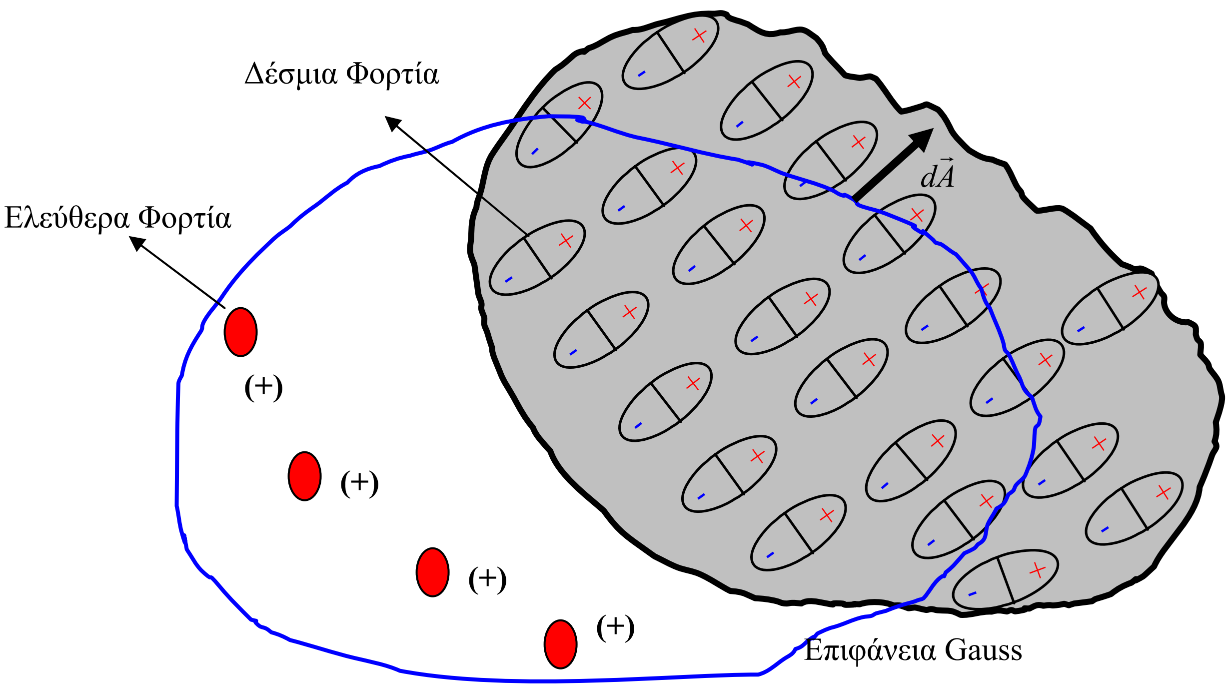
$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \vec{\nabla}\bullet\vec{P}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}\bullet\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_f \qquad (5.7)$$

Ορίζομε το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης $\vec{D}$ ως :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}} \quad (5.8)$$

Κατά συνέπεια η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss παρουσία πολωμένου διηλεκτρικού θα έχει τη μορφή:

$$\boxed{\vec{\nabla}\bullet\vec{D} = \rho_f} \quad (5.9)$$



Σχήμα 5.8. *Για την εξαγωγή του νόμου του Gauss παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών.*

Επομένως η ολοκληρωτική μορφή του σε μία κλειστή επιφάνεια τυχαίου σχήματος που περικλέιει ελεύθερα και δέσμια φορτία (βλ.Σχήμα 5.8) θα είναι :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\substack{\text{Κλειστή}\\ \text{Επιφάνεια}}} \vec{D}\bullet d\vec{A} = Q_f} \quad (5.10)$$

Ειδικά στην περίπτωση γραμμικού διηλεκτρικού θα έχομε ότι:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \left(\chi_e + 1\right) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

όπου:

• $\varepsilon_r = \left(\chi_e + 1\right)$ η σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού που είναι καθαρός αριθμός και μεγαλύτερος της μονάδας (για το κενό ή τον αέρα $\varepsilon_r = 1$)

• $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ η διηλεκτρική συταθερά του διηλεκτρικού σε Cb^2/Nm^2.

Κατά συνέπεια παρουσία γραμμικών πολωμένων διηλεκτρικών ο νόμος του Gauss έχει την ολοκληρωτική μορφή:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\substack{\text{Κλειστή}\\ \text{Επιφάνεια}}} \varepsilon \vec{E}\bullet d\vec{A} = Q_f} \quad (5.11)$$

Τα γραμμικά διηλεκτρικά χαρακτηρίζονται αποκλειστικά από την απόκρισή τους στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο με βάση την εξίσωση (5.2).Τα γραμμικά διηλεκτρικά διακρίνονται παράλληλα, ανάλογα με την έκφραση της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς τους σε

●Ομογενή γραμμικά διηλεκτρικά εάν η σχετική διηλεκτρική σταθερά τους είναι σταθερή παντού μέσα στο υλικό.

●Μη ομογενή γραμμικά διηλεκτρικά εάν σχετική διηλεκτρική σταθερά τους είναι συνάρτηση της θέσεως μέσα στο υλικό.

Σε κάθε περίπτωση ο νόμος του Gauss έχει την γενική ολοκληρωτική μορφή (5.11).

Ο ακόλουθος Πίνακας 5.ΙΙΙ δίνει τιμές σχετικών διηλεκτρικών σταθερών διαφόρων διηλεκτρικών.

Πίνακας 5.ΙΙΙ (Σχετική διηλεκτρική σταθερά διηλεκτρικών)

Υλικό	*Φυσικές Ιδιότητες*	ε_r
Κενό		1
NaCl	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	5,9
Γυαλί Pyrex	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	4,0
Πορσελάνη	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	6,0-8,0
Διαμάντι	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	5,7
Πυρίτιο (Si)	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	11,8
Θείο (S)	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	4,0
Πολυαιθυλένιο	Στερεό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	2,25-2,3
Πάγος	Στερεό (-30^0C)	99
H_2O	Υγρό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	80,1
Ορυκτέλαιο	Υγρό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	2,24
Βενζίνη	Υγρό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	1,84
Οινόπνευμα	Υγρό(Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	24
Αέρας	(Σε πίεση 1 atm και στους 0^0C)	1,00054
Υδρατμοί	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 110^0C)	1,00587
He	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	1,000065
Ne	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	1,00013
Ar	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	1,0052
H	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 20^0C)	1,00025
CH_4	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 0^0C)	1,00088
HCl	Αέριο (Σε πίεση 1 atm και στους 0^0C)	1,0046

Παρατήρηση 1.Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (5.10) και (5.11) υπολογίζουν το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται τόσο σε όλα τα ελέυθερα φορτία που βρίσκονται στη γειτονιά ενός πολωμένου διηλεκτρικού δημιουργώντας το εξωτερικό πεδίο που το πολώνει όσο και στα φορτία πόλωσης του ίδιου του πολωμένου διηλεκτρικού.Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο δίδεται και από την έκφραση

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}} \quad (5.12)$$

και φαίνεται να είναι το άθροισμα δύο «πεδίων» :

(i) του $\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$ που σχετίζεται με τα ελέυθερα φορτία που βρίσκονται στο χώρο, δεδομένου ότι $\vec{\nabla}\bullet\left(\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}\right)=\dfrac{\rho_f}{\varepsilon_0}$

Θα πρέπει να τονισθεί ιδιαίτερα ότι το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης δεν αναπαριστά κάποιο ηλεκτρικό πεδίο.Αυτό καθίσταται προφανές γράφοντας την έκφραση του στροβιλισμού του βάσει της σχέσεως ορισμού του (5.8) ως

$$\vec{\nabla}\times\vec{D}=\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)+\vec{\nabla}\times\vec{P}\overset{\vec{\nabla}\times\vec{E}=0}{=\!=\!=\!=}\vec{\nabla}\times\vec{P} \quad (5.13)$$

όπου παρατηρούμε ότι ισούται με τον στροβιλισμό της πόλωσης του διηλεκτρικού που δεν είναι εν γένει μηδέν.
Το πεδίο αυτό εισήχθει στον φορμαλισμό που προηγήθηκε για να «απορροφήσει» στην έκφραση του νόμου του Gauss τη συνεισφορά των δεσμίων φορτίων του πολωμένου διηλεκτρικού.Εάν θέλομε να αναπαραστήσομε την ηλεκτρική μετατόπιση με «δυναμικές γραμμές», **αυτές ξεκινούν και καταλήγουν μόνο σε ελέυθερα φορτία**.Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι η τιμή και η φορά της ηλεκτρικής μετατόπισης σε ένα σημείο εξαρτάται μόνο από τα ελευθερα φορτία που είναι παρόντα.Εξαρτάται και από τα δέσμια φορτία με βάση της σχέση ορισμού της (5.8).Η απόκλισή της όμως εξαρτάται μόνο από τα ελέυθερα φορτία.

(ii) του $-\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$ που σχετίζεται με τα φορτία πόλωσης που αναπτύσσονται στο διηλεκτρικό,δεδομένου ότι $\vec{\nabla}\bullet\left(-\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right)=\dfrac{\rho_b}{\varepsilon_0}$. Την ισχύ αυτής της έκφρασης είδαμε στο απλό παράδειγμα του ομοιόμορφα πολωμένου διηλεκτρικού κυλίνδρου που προηγήθηκε.Το διάνυσμα της πόλωσης **ξεκινά πάντα από αρνητικά και καταλήγει σε θετικά δέσμια φορτία**.

Οι δυναμικές γραμμές του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ **ξεκινούν και καταλήγουν ή σε ελέυθερα ή σε δέσμια φορτία ανάλογα με το πρόβλημα**.

Παρατήρηση 2 (Μεθοδολογία εφαρμογής του νόμου του Gauss παρουσία πολωμένων γραμμικών διηλεκτρικών).Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή του νόμου του Gauss οδηγεί ιδιαίτερα εύκολα στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ εάν το πρόβλημα παρουσιάζει σφαιρική, κυλινδρική ή συμμετρία επιπέδου.Η γενική μεθοδολογία που ακολουθείται είναι η εξής:

●Επιλέγομε κατάλληλες επιφάνειες Gauss σύμφωνα με τη συμμετρία του προβλήματος.

Στη συνέχεια προσδιορίζομε το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης σε κάθε περιοχή του χώρου με βάση την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss:

$$\oiint_{\substack{\text{Επιφάνεια}\\ \text{Gauss}}}\vec{D}\bullet d\vec{A}=Q_f$$

προσέχοντας πάντα στην παραπάνω έκφραση να συμπεριλαμβάνομε μόνο τα ελέυθερα φορτία που περικλείονται στην επιφάνεια Gauss εξαιρώντας τα δέσμια φορτία πόλωσης.

●Στη συνέχεια υπολογίζομε την ένταση του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε περιοχή του χώρου με βάση την έκφραση:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}, & \text{σε χώρο που υπάρχει κενό ή αέρας} \\ \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, & \text{σε χώρο που υπάρχει γραμμικό πολωμένο διηλεκτρικό} \end{cases}$$

●Η πόλωση του διηλεκτρικού (που πάντα υπολογίζεται στον χώρο που αυτό καταλαμβάνει) θα δίδεται από την έκφραση:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

●Τέλος μπορούν να υπολογισθούν και οι πυκνότητες χωρικού και επιφανειακού φορτίου του πολωμένου διηλεκτρικού, εφόσον υπολογισθεί η πόλωση, από τις σχέσεις (5.5) και (5.6).

Παράδειγμα 5.1: Ένα θετικό σημειακό φορτίο q βρίσκεται στο κέντρο συμμετρίας ενός σφαιρικού κελύφους από γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό εσωτερικής ακτίνας α, εξωτερικής ακτίνς b και σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r,όπως στο Σχήμα. Να υπολογισθούν;

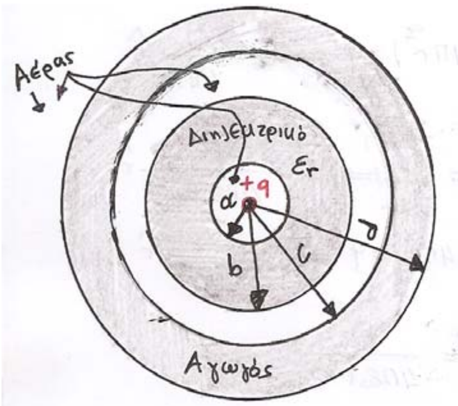
(α) Η ηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ στις περιοχές (i) r<α, (ii) α<r<b, (iii) r>b.

(β) Η πόλωση $\vec{P}$ του διηλεκτρικού.

(γ) Η χωρική πυκνότητα δεσμίου φορτίου πολώσεως ρ_b του διηλεκτρικού και η επιφανειακή πυκνότητα δεσμίου φορτίου πολώσεως σ_b στις επιφάνειες του διηλεκτρικού.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.

Παράδειγμα 5.2: Ένας σφαιρικός αφόρτιστος διηλεκτρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής b αποτελείται από γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r.Ο φλοιός αυτός περιβάλλεται από ομόκεντρο σφαιρικό αφόρτιστο αγώγιμο φλοιό εσωτερικής ακτίνας c και εξωτερικής d, όπως στο Σχήμα. Στο κέντρο συμμετρίας της διάταξης τοποθετείται σημειακό θετικό φορτίο q.



Να υπολογισθούν :

(α)Η ηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ παντού.(β) Η πόλωση $\vec{P}$ του διηλεκτρικού. (γ)Η χωρική πυκνότητα δεσμίου φορτίου πολώσεως ρ_b του διηλεκτρικού.(δ)Η επιφανειακή πυκνότητα δεσμίου φορτίου πολώσεως σ_b στις επιφάνειες του διηλεκτρικού.(ε)Η επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερου φορτίου στις επιφάνειες του αγώγιμου φλοιού.Τέλος να σχεδιαστούν τα πεδία $\vec{D}$, $\vec{E}$ και $\vec{P}$.

Λύση : Έχει δοθεί ως άλυτο Πρόβλημα στη Σειρά #5

5.4 Ένας κόσμος μέσα σε διηλεκτρικό

Μέχρι στιγμής διαπραγματευτήκαμε την Ηλεκτροστατική στο κενό ή τον αέρα (ένα ομογενές γραμμικό διηλεκτρικό με ε_r=1).Αξίζει να εξατάσει κανείς πώς τροποποιείται στην περίπτωση που ο χώρος στον οποίο υπάρχουν πηγές ηλεκτρικών πεδίων (σημειακών φορτίων ή συνεχών κατανομών φορτίου) αποτελείται από ένα άλλο υλικό.

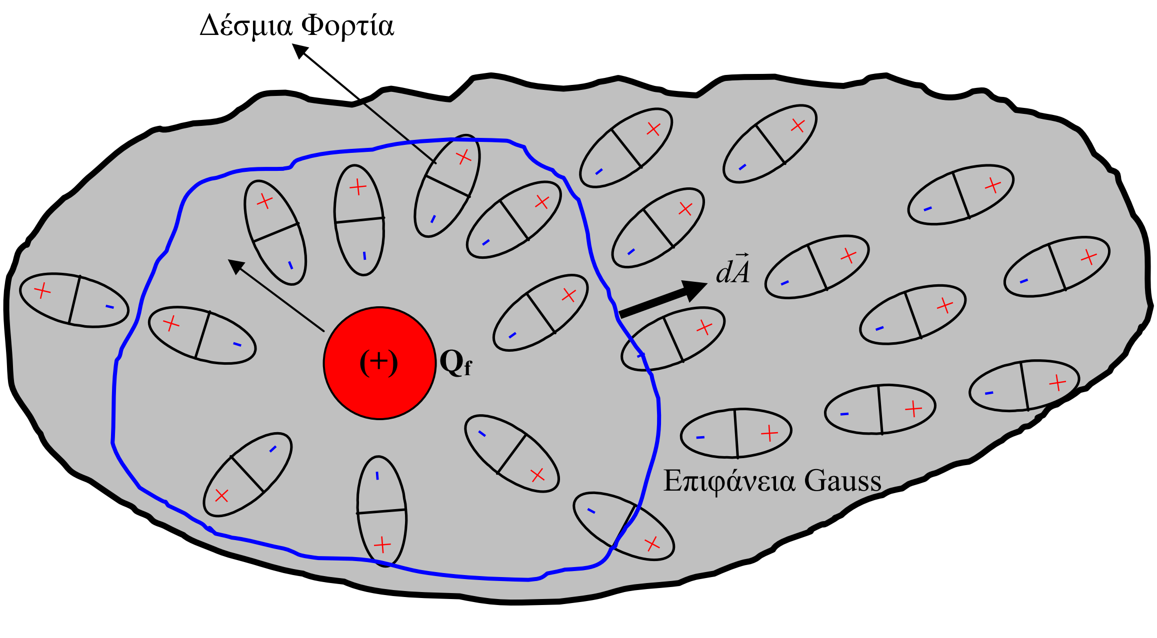
Στην περίπτωση ενός φανταστικού κόσμου μέσα σε έναν αγωγό η διαπραγμάτευση δεν έχει νόημα δεδομένου ότι στο εσωτερικό των αγωγών δεν αναπτύσσονται ηλεκτρικά πεδία.

Στην περίπτωση ενός κόσμου μέσα σε ένα απέραντο διηλεκτρικό η διαπραγμάτευση έχει νόημα.Μέχρι στιγμής στις προηγούμενες παραγράφους θεωρήσαμε την περίπτωση ενός χώρου μοιρασμένου μεταξύ κενού ή αέρα και ενός διηλεκτρικού υλικού.Το διηλεκτρικό φερόταν σε μία περιοχή του χώρου (κενό ή αέρας) όπου προϋπήρχε ένα ηλεκτρικό πεδίο, πολώνονταν και ανέπτυσσε και αυτό το δικό του πεδίο πολώσεως.Κατά συνέπεια στον χώρο εντός και εκτός του διηλεκτρικού το συνολικό πεδίο είναι το άθροισμα των δύο πεδίων που προαναφέρθηκαν και μπορεί να υπολογισθεί από τον νόμο του Gauss με βάση την εξίσωση (5.10).Η μορφή της εξίσωσης αυτής δεν αλλάζει εάν φανταστούμε ότι όλος ο χώρος καλύπτεται από ένα απέραντο διηλεκτρικό μέσα στο οποίο βρίσκονται ελέυθερα (με την έννοια ότι δεν είναι φορτία πόλωσης) φορτία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.9 που απεικονίζει μία συνεχή κατανομή φορτίου (π.χ έναν φορτισμένο αγωγό) συνολικού θετικού φορτίου Q κατανεμημένου με πυκνότητα ρ σε διηλεκτρικό περιβάλλον.Υπό την επίδραση αυτού του ελέυθερου φορτίου ο περιβάλλον χώρος πολώνεται και ο νόμος του Gauss γράφεται ξανά με την μορφή:

$$\boxed{\underset{\substack{\text{Κλειστή}\\ \text{Επιφάνεια}}}{\oiint} \vec{D}\bullet d\vec{A} = Q_f = Q \Leftrightarrow \vec{\nabla}\bullet\vec{D} = \rho_f = \rho}$$ **Νόμος του Gauss ή 1η Εξίσωση του Maxwell στην ύλη**

Στην περίπτωση που το ελεύθερο αυτό φορτίο βρίσκεται στο κενό ή τον αέρα η παραπάνω έκφραση μεταπίπτει στην γνωστή μας

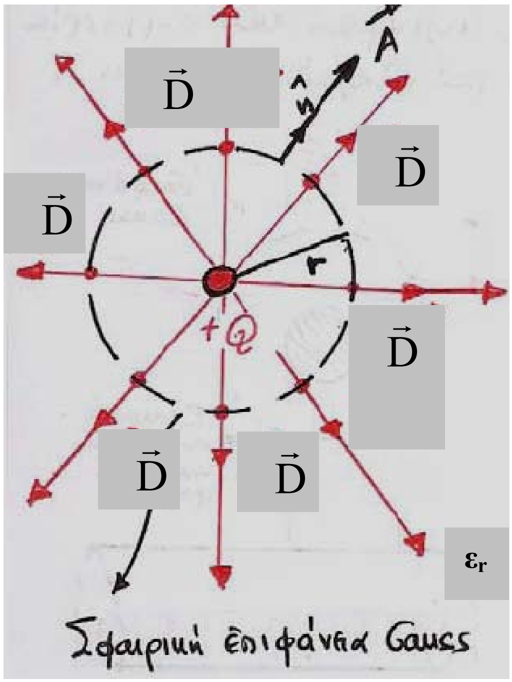
$$\boxed{\underset{\substack{\text{Κλειστή}\\ \text{Επιφάνεια}}}{\oiint} \vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ **Νόμος του Gauss ή 1η Εξίσωση του Maxwell στο κενό ή τον αέρα**



Σχήμα 5.9. *Φορτισμένο σώμα σε έναν κόσμο από διηλεκτρικό.*

Εφαρμογή 5.2: Ο Νόμος του Coulomb σε έναν κόσμο από διηλεκτρικό.

Θεωρούμε το θετικό σημειακό φορτίο Q του Σχήματος, αλλά όχι στο κενό.Θεωρούμε ότι βρίσκεται σε έναν χώρο από γραμμικό ομογενές διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r.



Επιθυμούμε να υπολογίσομε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του συναρτήσει της απόστασης r από αυτό.Το πρόβλημα παρουσιάζει προφανή σφαιρική συμμετρία και για τον λόγο αυτό θεωρούμε την νοητή σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r του Σχήματος.Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος η ηλεκτρική μετατόπιση θα έχει το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία αυτής της επιφάνειας κατευθυνόμενη ακτινικά προς τα έξω. Κατά συνέπεια εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss παρουσία του πολωμένου πλέον διηλεκτρικού που το περιβάλλει θα έχομε ότι :

$$\oiint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}\\ r}} \vec{D}\bullet d\vec{A} = Q_f = Q \Rightarrow \oiint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}\\ r}} \left(\vec{D}\bullet\hat{n}\right) dA = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oiint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}\\ r}} DdA\cos 0^0 = Q \Rightarrow D \oiint\limits_{\substack{\text{επιφάνεια}\\ \text{σφαίρας}\\ r}} dA = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\left(4\pi r^2\right) = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Ή διανυσματικά :

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Δεδομένου ότι το διηλεκτρικό είναι γραμμικό θα έχομε ότι:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

Εάν τώρα σε απόσταση r από αυτό φέρομε ένα σημειακό φορτίο q, η δύναμη που θα δεχθεί από την πηγή του πεδίου Q θα είναι:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

που είναι η γνωστή έκφραση του νόμου του Coulomb ελαττωμένη κατά ε_r φορές .

Κατά συνέπεια η σταθερά του Coulomb έχει την μορφή μέσα σε έναν κόσμο από διηλεκτρικό:

$$\boxed{K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

όπως έχει ήδη αναφερθεί.

5.5 Οριακές συνθήκες παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

Ας θεωρήσομε την περίπτωση δύο πολωμένων διηλεκτρικών που διαχωρίζονται μεταξύ τους από μία φορτισμένη επιφάνεια που περιέχει τόσο ελέυθερα φορτία με επιφανειακή πυκνότητα σ_f ,όσο και δέσμια φορτία με επιφανειακή πυκνότητα σ_b ,έτσι ώστε η ολική πυκνότητα φορτίου της να είναι $\sigma = \sigma_f + \sigma_b$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.10.

Στόχος είναι να υπολογισθεί η μεταβολή της ηλεκτρικής μετατόπισης $\vec{D}$ κατά μήκος της φορτισμένης διεπιφάνειας μεταξύ των διηλεκτρικών.Στην περίπτωση αυτή οι γενικές οριακές συνθήκες για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που έχουν αποδειχθεί στο κενό ή τον αέρα εξακολουθούν να ισχύουν (αποδεικνύονται κατά τον ίδιο τρόπο) αφορώντας το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται τόσο από τα ελέυθερα φορτία όσο και από τα δέσμια φορτία πόλωσης των δύο διηλεκτρικών.Θα ισχύει δηλαδή ότι:

$$\boxed{\begin{aligned} &E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f + \sigma_b}{\varepsilon_0} \\ &E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \end{aligned}} \quad (5.14)$$

Στην περίπτωση αυτή η πυκνότητα δεσμίου φορτίου πολώσεως στη διεπιφάνεια θα είναι:

$$\sigma_b = \vec{P}_2 \bullet \hat{n} + \vec{P}_1 \bullet \hat{n} = -P_{2\perp} + P_{1\perp} = P_{1\perp} - P_{2\perp}$$

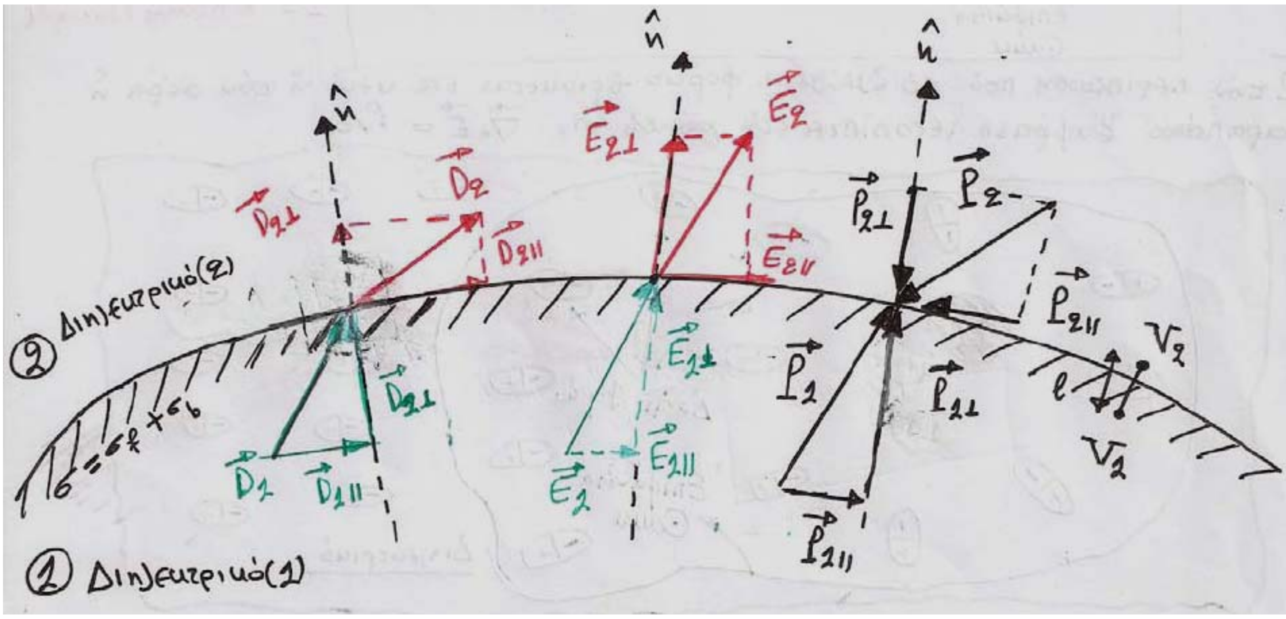
(Για την φορά της πόλωσης στα δύο διηλεκτρικά φανταστείτε ότι η φορτισμένη επιφάνεια έχει συνολικό αρνητικό φορτίο-αντίστοιχη λογική επικρατεί και στην περίπτωση που θα είχε συνολικό θετικό φορτίο).

Στις περιοχές (1) και (2) του Σχήματος θα ισχύει ότι

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχομε ότι:



Σχήμα 5.10. *Για την απόδειξη των οριακών συνθηκών παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών.*

$$\vec{D}_2-\vec{D}_1=\varepsilon_0\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)+\left(\vec{P}_2-\vec{P}_1\right)\Rightarrow\begin{cases} D_{2\perp}-D_{1\perp}=\varepsilon_0\overbrace{\left(E_{2\perp}-E_{1\perp}\right)}^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}+\overbrace{\left(P_{2\perp}-P_{1\perp}\right)}^{-\sigma_b} \\ D_{2\|}-D_{1\|}=\varepsilon_0\overbrace{\left(E_{2\|}-E_{1\|}\right)}^{0}+\left(P_{2\|}-P_{1\|}\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} D_{2\perp}-D_{1\perp}=\varepsilon_0\dfrac{\sigma_f+\sigma_b}{\varepsilon_0}-\sigma_b \\ D_{2\|}-D_{1\|}=P_{2\|}-P_{1\|}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{2\perp}-D_{1\perp}=\sigma_f \\ D_{2\|}-D_{1\|}=P_{2\|}-P_{1\|}\end{cases}} \quad (5.15)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνιστούν τις οριακές συνθήκες για την ηλεκτρική μετατόπιση στην φορτισμένη διεπιφάνεια μεταξύ δύο πολωμένων διηλεκτρικών.Παρατηρούμε ότι και οι δύο συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι ασυνεχείς καθώς μεταβαίνομε από την περιοχή (1) στην περιοχή (2).

Με τον τρόπο που ακολουθήθηκε στην περίπτωση του κενού αποδεικνύεται και ότι:

$$\boxed{V_2=V_1} \quad (5.16)$$

που υποδηλώνει ότι το δυναμικό είναι συνεχής συνάρτηση στις περιοχές (1) και (2).

Ειδικές περιπτώσεις:

(α) Στην περίπτωση όπου η φορτισμένη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο διηλεκτρικών δεν περιέχει ελέυθερα φορτία $\left(\sigma_f=0\right)$, η κάθετη συνιστώσα της ηλεκτρικής μετατόπισης θα είναι συνεχής $\left(D_{2\perp}=D_{1\perp}\right)$,ενώ δεν επηρρεάζεται η ασυνέχεια της παράλληλης συνιστώσας.

(β) Στην περίπτωση που το ένα υλικό -έστω το (1)- είναι αγωγός θα έχομε ότι

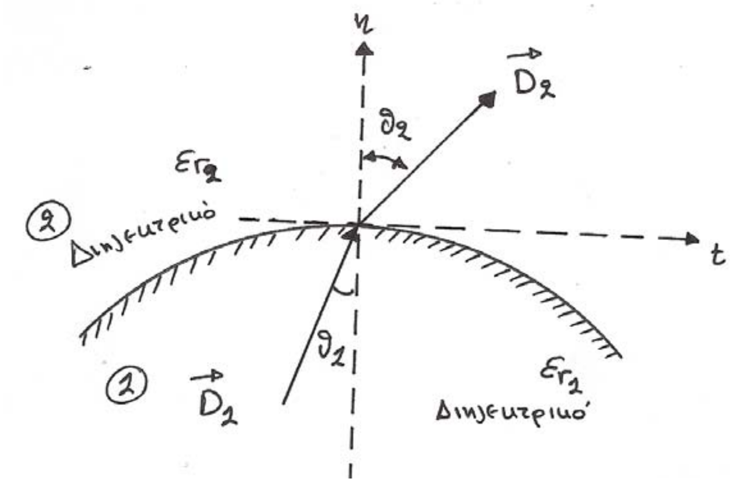
$$\vec{D}_1=\vec{E}_1=\vec{P}_1=0$$

και κατά συνέπεια:

$$\vec{D}_2\bullet\hat{n}=\vec{D}\bullet\hat{n}=\sigma_f$$

γεγονός που υποδηλώνει την παρουσία μόνο κάθετης συνιστώσας της ηλεκτρικής μετατόπισης στο διηλεκτρικό (2).

Εφαρμογή 5.3 : Θεωρείστε την περίπτωση δύο πολωμένων διηλεκτρικών που διαχωρίζονται από μια επιφάνεια που δεν περιέχει ελεύθερα φορτία ($\sigma_f = 0$) παρά μόνο τα δέσμια επιφανειακά φορτία των δύο υλικών.



(α) Να αποδειχθεί ότι η αλλαγή διεύθυνσης της ηλεκτρικής μετατόπισης δίδεται από τη σχέση :

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

Σημειώστε ότι η παραπάνω σχέση θυμίζει τον νόμο του Snell στην οπτική.
(β) Εάν θεωρηθεί γνωσό το μέτρο και η διεύθυνση της ηλεκτρικής μετατόπισης και του ηλεκτρικού πεδίου στο διηλεκτρικό 1 να αποδειχθεί ότι τα αντίστοιχα στο διηλεκτρικό 2 προσδιορίζονται από τις σχέσεις :

$$D_2 = D_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)^2 \sin^2\theta_1}\,, \quad \mathrm{E}_2 = E_1\sqrt{\sin^2\theta_1 + \left(\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\right)^2 \cos^2\theta_1}$$

Παράδειγμα 5.3: Θεωρούμε ένα δοχείο με υγρό γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r.Βυθίζομε σε αυτό μία θετικά ομοιόμορφα φορτισμένη συμπαγή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R και συνολικού φορτίου Q,κατά τρόπο ώστε μέχρι τη μέση της να βρίσκεται μέσα στο υγρό,όπως φαίνεται στο Σχήμα.Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου της σφαίρας.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.

5.6 Ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου παρουσία πολωμένων διηλεκτρικών

Στην περίπτωση της διαπραγμάτευσης της Ηλεκτροστατικής στο κενό ή τον αέρα απεδείχθει ότι η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου μίας συνεχούς κατανομής φορτίου (η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια της κατανομής που ισοδυναμεί με το έργο που απαιτείται για την διάλυσή της) δίδεται συναρτήσει του ηλεκτρικού της πεδίου από την σχέση:

$$U_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \mathrm{E}^2 d\upsilon$$

Στην περίπτωση όπου το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο συντίθεται από ένα πεδίο ελεύθερων φορτίων και ένα ενός πολωμένου διηλεκτρικού είναι δυνατόν να καταλήξομε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\boxed{U_p = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \vec{D}\bullet\vec{E} d\upsilon} \quad (5.17)$$

που εφαρμόζεται εξίσου στις δύο περιπτώσεις του σχήματος 5.11:

(i) Στην περίπτωση όπου η συνεχής κατανομή φορτίου βρίσκεται μέσα σε χώρο που καλύπτεται από διηλεκτρικό (σε έναν κόσμο από διηλεκτρικό), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11(α).

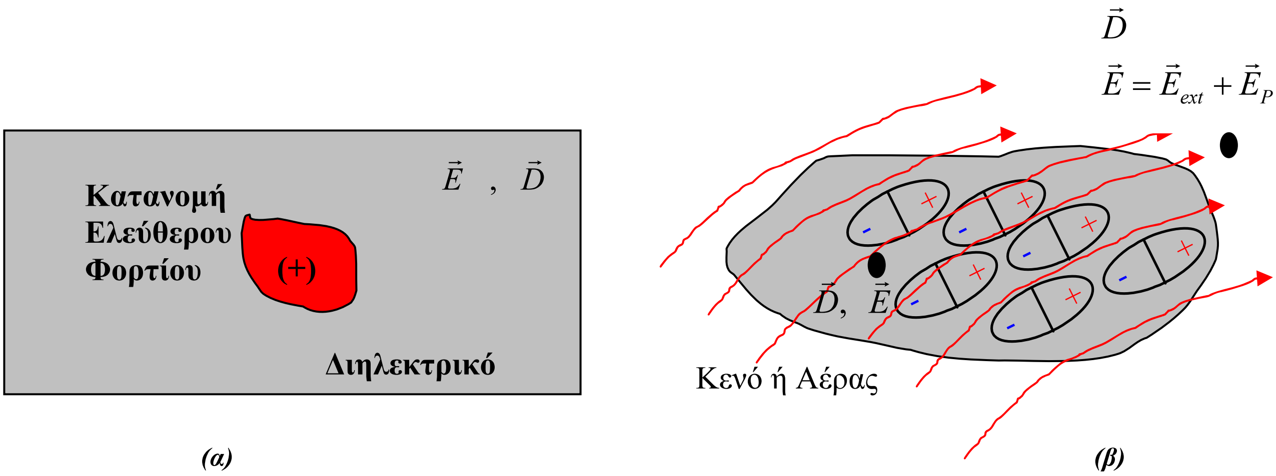
(ii) Στην περίπτωση όπου ένα διηλεκτρικό πολώνεται παρουσία ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου στο κενό ή τον άέρα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11(β).

Στις περιπτώσεις αυτές η πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\vec{E}\bullet\vec{P}} \quad (5.18)$$

Στην ειδική περίπτωση γραμμικών διηλεκτρικών θα έχομε ότι:

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \quad \text{και} \quad U_p = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\substack{\acute{o}\lambda o\varsigma \\ o \\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}} \varepsilon_0 E^2 d\upsilon$$



Σχήμα 5.11. *Περιπτώσεις εφαρμογής της εξισώσεως (5.17).*

Παράδειγμα 5.4: Μια θετικά φορτισμένη αγώγιμη συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και συνολικού φορτίου Q βυθίζεται σε υγρό γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό, η σχετική διηλεκτρική σταθερά του οποίου είναι ε_r .
Να υπολογισθεί η ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου της σφαίρας.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.

5.7 Πυκνωτές με διηλεκτρικά

Θεωρούμε έναν επίπεδο πυκνωτή με οπλισμούς επιφάνειας Α και φορτία ±Q που κατανέμονται σε αυτούς με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα $\pm\sigma$.Αρχικά ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του είναι κενό ή αέρας.Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών έχει ένταση μέτρου

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \mathrm{A}}$$

και διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του

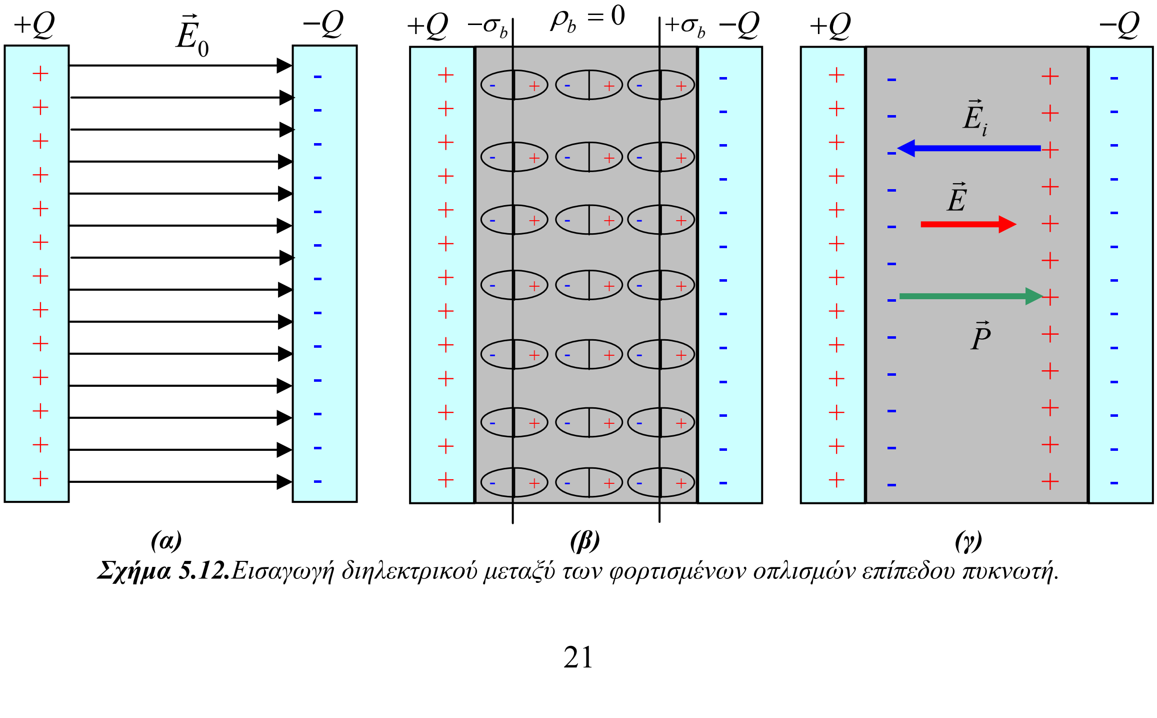
$$V_0 = E_0 d$$

όπως έχει ήδη αποδειχθεί.
Η χωρητικότητά του δίδεται από την έκφραση:

$$C_0 = \frac{Q}{V_0} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Η κατάσταση αποδίδεται στο Σχήμα 5.12(α).Εισάγομε στον μεταξύ των οπλισμών του χώρο ένα κομμάτι από γραμμικό ομογενές διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r που τον καλύπτει πλήρως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12(β).Τα μόρια του διηλεκτρικού πολώνονται παράλληλα προς το αρχικό εξωτερικό πεδίο $\vec{E}_0$.Κατά συνέπεια αναπτύσσονται σε αυτό επιφανειακά φορτία πολώσεως με επιφανειακές πυκνότητες $\pm\sigma_b$ καθώς και χωρικά φορτία πολώσεως.Λόγω της πόλωσης του διηλεκτρικού αναπτύσσεται ένα νέο ηλεκτρικό πεδίο (πολώσεως)στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή που έχει αντίθετη φορά από το αρχικό εξωτερικό πεδίο $\vec{E}_0$ και θα συμβολίζεται τώρα ως $\vec{E}_i$.Το πεδίο αυτό του πολωμένου διηλεκτρικού οφείλεται τελικά μόνο στα επιφανειακά φορτία πολώσεως στις δύο επιφάνειές του, δεδομένου ότι το εσωτερικό χωρικό φορτίο πολώσεως είναι αθροιστικά μηδέν.Αυτό μπορεί επίσης να καταστεί σαφές από το γεγονός ότι το διηλεκτρικό είναι ομοιόμορφα πολωμένο με χωρικά σταθερή πόλωση για την οποία θα ισχύει ότι $\vec{\nabla}\bullet\vec{P} = 0$,γεγονός που οδηγεί σε μηδενική συνεισφορά του χωρικού δεσμίου φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο πολώσεως.Κατά συνέπεια το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή θα είναι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12(γ):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \Rightarrow E = E_0 - E_i$$



Σχήμα 5.12.*Εισαγωγή διηλεκτρικού μεταξύ των φορτισμένων οπλισμών επίπεδου πυκνωτή.*

Το συνολικό πεδίο μπορεί να υπολογισθεί με την βοήθεια του νόμου του Gauss με βάση το ακόλουθο Σχήμα 5.13(α), όπου θεωρούμε επιφάνεια Gauss (σχήματος παραλληλεπιπέδου και εμβαδού βάσεως ίσου με αυτό του οπλισμού του πυκνωτή) που περικλείει τόσο το φορτίο του οπλισμού, όσο και το επιφανειακό φορτίο πολώσεως του διηλεκτρικού.Το φορτίο του μεταλλικού οπλισμού είναι ελέυθερο φορτίο, ενώ το επιφανειακό φορτίο πολώσεως του διηλεκτρικού είναι δέσμιο φορτίο.Επομένως θα έχομε:

$$\oiint_{\substack{\text{Κλειστή}\\ \text{Επιφάνεια}\\ \text{Gauss}}} \vec{D}\bullet d\vec{A} = Q_f = Q \overset{\vec{D}\uparrow\uparrow\hat{n}}{\overbrace{\Rightarrow}} DA = \sigma A \Rightarrow \vec{D} = \sigma\hat{i}$$

Αφού το διηλεκτρικό είναι γραμμικό και ομογενές

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ των οπλισμών μειώθηκε κατά ε_r φορές με την εισαγωγή του διηλεκτρικού.
Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών έχομε ότι:

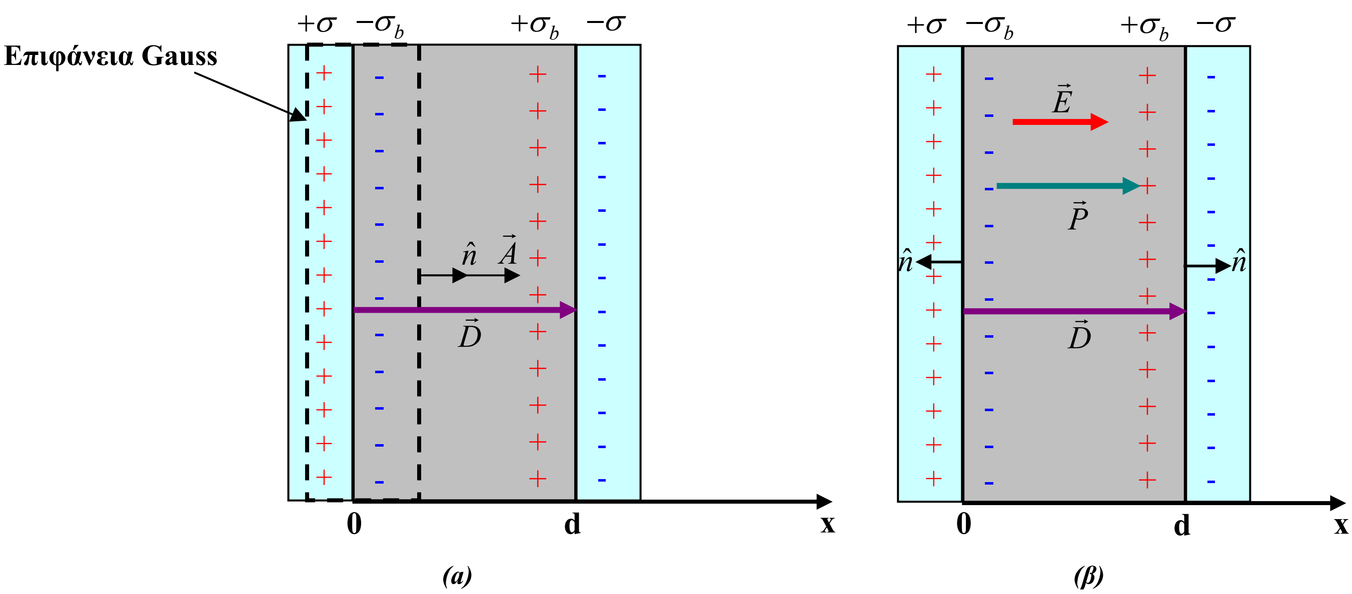
$$V = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E}\bullet d\vec{\ell} = \int_{(+)}^{(-)} \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}\bullet d\vec{\ell} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}\int_0^d d\ell = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά δυναμικού στον χώρο μεταξύ των οπλισμών μειώθηκε κατά ε_r φορές με την εισαγωγή του διηλεκτρικού.
Δεδομένου ότι το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή δεν μεταβάλλεται κατά την εισαγωγή του διηλεκτρικού για την νέα χωρητικότητα του συστήματος θα έχομε ότι:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{V_0}{\varepsilon_r}} = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξήθηκε κατά ε_r φορές με την εισαγωγή του διηλεκτρικού.
Η πόλωση του διηλεκτρικού δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \sigma\hat{i} - \varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\hat{i} \Rightarrow \vec{P} = \sigma\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\hat{i}$$



Σχήμα 5.13. *(α) Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής μετατόπισης.(β)Τα διανύσματα* $\vec{D}$, $\vec{P}$, $\vec{E}$.

Παρατηρούμε ότι η πόλωση δεν παρουσιάζει χωρική εξάρτηση [γεγονός πού σημαίνει,όπως έχει προαναφερθεί, ότι $\rho_b = -\vec{\nabla}\bullet\vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial x} = 0$].

Οι επιφανειακές πυκνότητες δέσμιου φορτίου του διηλεκτρικού συναρτήσει του φορτίου των οπλισμών του υπολογίζονται με βάση το Σχήμα 5.13(β) ως εξής:

Στην αριστερή επιφάνεια του διηλεκτρικού

$\sigma_b = \vec{P}\bullet\hat{n} = P\cos 180^0 = -P = -\sigma\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) < 0$, όπως αναμενόταν.

Στην δεξιά επιφάνεια του διηλεκτρικού

$\sigma_b = \vec{P}\bullet\hat{n} = P\cos 0^0 = P = \sigma\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) > 0$, όπως αναμενόταν.

Τα τρία διανύσματα $\vec{D}$, $\vec{E}$ και $\vec{P}$ εικονίζονται στο Σχήμα 5.13(β).

Το $\vec{D}$ ξεκινά από και καταλήγει σε ελέυθερα φορτία που είναι αυτά των οπλισμών του πυκνωτή.

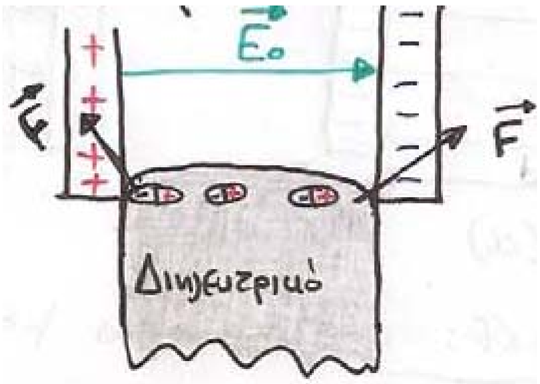
Το $\vec{P}$ ξεκινά από και καταλήγει στα επιφανειακά δέσμια φορτία πολώσεως του διηλεκτρικού.

Το $\vec{E}$ καθορίζεται από τη σχέση $\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0}$

Τέλος η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή θα είναι

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0} = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

Δεδομένου ότι $\varepsilon_r > 1$, η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική.Η διαφορά τους αντιστοιχεί στο παραγόμενο από το αρχικό πεδίο έργο που έλκοντας το διηλεκτρικό,όπως φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα 5.14, το ωθεί προς το εσωτερικό του πεδίου.



Σχήμα 5.14.*Διαδικασία εισαγωγής του διηλεκτρικού μεταξύ των φορτισμένων οπλισμών επίπεδου πυκνωτή.*

Παρατήρηση:*Στην διαπραγμάτευση που προηγήθηκε το πρόβλημα αντιμετωπίσθηκε υπό συνθήκες σταθερού, όπως λέμε, φορτίου των οπλισμών του πυκνωτή.Αυτό σημαίνει ότι το φορτίο των οπλισμών του δεν μεταβλήθηκε κατά την εισαγωγή του διηλεκτρικού στον μεταξύ τους χώρο.Η αλλαγή της χωρητικότητας του συστήματος επήλθε από την μεταβολή της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.Εάν όμως ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος με μία μπαταρία κατά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του δεν μπορεί να αλλάξει και διατηρείται πάντα στην τιμή V_0.Αυτό συνιστά διαπραγμάτευση του προβλήματος υπό συνθήκες σταθερής διαφοράς δυναμικού.Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το φορτίο των οπλισμών του πυκνωτή αλλάζει μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού σε* $Q' = \varepsilon_r Q$ *.Η νέα χωρητικότητα του συστήματος θα είναι όμως πάλι* $C = \varepsilon_r C_0$.

Παράδειγμα 5.5: Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών ενός σφαιρικού πυκνωτή γεμίζεται με γραμμικό και ομογενές διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r , όπως στο Σχήμα.Εάν το φορτίο των οπλισμών του είναι Q και οι ακτίνες του εσωτερικού και του εξωτερικού οπλισμού του α και b αντίστοιχα,να υπολογισθεί η χωρητικότητά του.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.

Παράδειγμα 5.6: Δύο παράλληλες στρώσεις γραμμικών και ομογενών διηλεκτρικών ίσου πάχους αλλά διαφορετικής σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς γεμίζουν τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή με εμβαδό Α, όπως στο Σχήμα.Το φορτίο των οπλισμών είναι Q και η μεταξύ τους απόσταση d.Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του συστήματος.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.

Παράδειγμα 5.7: Δύο παράλληλες στρώσεις γραμμικών και ομογενών διηλεκτρικών ίσου πάχους αλλά διαφορετικής σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς γεμίζουν τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή με εμβαδό Α, όπως στο Σχήμα.Το φορτίο των οπλισμών είναι Q και η μεταξύ τους απόσταση d.Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του συστήματος.

Λύση : Λύθηκε στο Μάθημα.