

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ 01/2016

ΘΕΜΑ 1

I. $a=2c$ και $m=3$ (με χρήση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής και εκφράζοντας το dS ως συνάρτηση των dT και dV προκειμένου να παραγωγίσουμε στη συνέχεια τους συντελεστές αυτής της έκφρασης ως προς τη μεταβλητή του άλλου συντελεστή).

II. Κάνοντας χρήση των μακροσκοπικών μεταβλητών A, T από τις οποίες εξαρτώνται τα σ και C_A και για την $S=S(A,T)$, εκφράζουμε αρχικά το ολικό διαφορικό της εντροπίας dS ως άθροισμα των μερικών παραγώγων της ως προς τα A και T .

Επίσης, $C_A=(\delta Q/dT)_A=T(\partial S/\partial T)_A$ (εξ' ορισμού για σταθερή επιφάνεια A , κάνοντας χρήση και της θεμελιώδης ταυτότητας της θερμοδυναμικής). Από εδώ βρίσκουμε ότι: $(\partial S/\partial T)_A=C_A/T$, όπου $C_A(T)=NK_B+NK_B(T/T_c)^2$.

Από τη σχέση του Maxwell: $(\partial S/\partial A)_T = -(\partial \sigma/\partial T)_A$ όπου $\sigma(A,T)=\sigma_0-[NK_B T/(A-\lambda N)]+mN^2/A^2$, βρίσκουμε ότι: $(\partial S/\partial A)_T=NK_B/(A-\lambda N)$.

Αντικαθιστώντας τις δύο μερικές παραγώγους που βρήκαμε στο dS και ολοκληρώνοντας ως προς T και A διαδοχικά (κάνοντας χρήση και της παραγώγου $(\partial S/\partial A)_T$ που βρήκαμε προηγουμένως), βρίσκουμε τελικά ότι:

$S=NK_B \ln T + (1/2)NK_B(T/T_c)^2 + NK_B \ln(A-\lambda N) + s_0$ όπου s_0 : προσθετική σταθερά που θα εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες για τα T, A .

ΘΕΜΑ 2

α) Με χρήση της μικροκανονικής κατανομής, βρίσκω τον αριθμό μικροκαταστάσεων W ως γινόμενο (*), από το *συνδυασμό*, του αριθμού διευθετήσεων (τρόπων) τόσο ως προς την τοποθέτηση m ατόμων του αερίου στις N κυψελίδες της επιφάνειας των τοιχωμάτων του δοχείου όσο και ως προς την τοποθέτηση των υπόλοιπων $(N-m)$ ατόμων του αερίου στις Λ κυψελίδες του εσωτερικού του δοχείου,

$$W=[N!/m!(N-m)!] \cdot \{\Lambda!/(N-m)!\} [\Lambda-(N-m)!]$$

β) $S=K_B \ln W$ όπου αντικαθιστούμε όλα τα παραγοντικά κάνοντας χρήση της προσέγγισης του Stirling $\ln N! \approx N \ln N - N$ για $N \gg 1$.

γ) $1/T = (\partial S/\partial E)_{N,\Lambda} = (\partial S/\partial m)(\partial m/\partial E) = (\partial S/\partial m)(-1/\epsilon)$ (Αφού κάθε μόριο έχει ενέργεια $-\epsilon$ στην επιφάνεια των τοιχωμάτων ενώ έχει μηδενική ενέργεια όταν βρεθεί στο εσωτερικό του, $E = -m\epsilon$).

Κάνοντας χρήση της έκφρασης του S από το ερώτημα β και παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή m , βρίσκουμε εύκολα ότι: $(N-m)^2/[m(\Lambda-N+m)] = \exp(-\epsilon/K_B T)$ [μια σχέση δηλαδή για το $m=f(T)$].

δ) Για $T \rightarrow 0$, $m/N \sim 1$ και για $T \rightarrow \infty$, $m/N \sim N/(\Lambda+N)$.

Στο απόλυτο μηδέν, πρακτικά όλα τα άτομα βρίσκονται στην επιφάνεια των τοιχωμάτων. Αντιθέτως, σε πολύ μεγάλες θερμοκρασίες ($T \rightarrow \infty$), το ποσοστό ατόμων του αερίου που είναι στην επιφάνεια των τοιχωμάτων είναι ουσιαστικά ίσο με αυτό που είναι σε θέσεις τόσο στο εσωτερικό όσο και στην επιφάνεια.

ΘΕΜΑ 3

α) Από τη έκφραση για το W , $W(U,N,V) = V^N [(4\pi m \epsilon U)/(3N)]^{3N/2}$ και τη σχέση $S=K_B \ln W$ βρίσκουμε την εντροπία S του αερίου ως συνάρτηση των N, V, T (χρησιμοποιώντας βέβαια και την έκφραση για την εσωτερική ενέργεια U ενός ιδανικού μονοατομικού αερίου: $U=3NK_B T/2$).

Τελικά: $S=NK_B \ln V + (3/2)NK_B \ln [2\pi m \epsilon K_B T/2]$.

Η έκφραση όμως που προκύπτει για την S δεν ικανοποιεί το κριτήριο της εκτατικότητας αφού αν αυξήσουμε πχ. τον αριθμό σωματιδίων του αερίου από N σε $N'=aN$ (a : σταθερά αναλογίας) και, κατά συνέπεια, και τον όγκο από V σε $V'=aV$ τότε η $S' \neq aS$ (λόγω της μορφής του πρώτου όρου της S).

β) Εφόσον η θερμοκρασία T και η πίεση P είναι η ίδια στα δύο τμήματα του δοχείου (που περιέχει τα δύο αέρια), βρίσκουμε από την καταστατική ιδανικού αερίου $PV=NK_B T$ ότι $N_1 K_B T/V_1 = N_2 K_B T/V_2$ (όπου $V_1 = \lambda V$ και $V_2 = (1-\lambda)V$).

Επομένως βρίσκουμε εύκολα ότι $N_2 = (1-\lambda)N_1/\lambda$ και άρα ότι τα N_1 και N_2 είναι ανάλογα του N με σταθερές αναλογίας $\alpha = \lambda$ για το N_1 και $1-\alpha = 1-\lambda$ για το N_2 (αφού $N = N_1 + N_2$).

Μετά την ανάμιξη των δύο αερίων (1 και 2) βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\Delta S_1 = S_{\text{τελ},1} - S_{\text{αρχ},1} = N_1 K_B \ln V - N_1 K_B \ln(\lambda V) = \lambda N K_B \ln(1/\lambda)$$

$$\Delta S_2 = (1-\lambda) N K_B \ln[1/(1-\lambda)]$$

$$\Delta S_{\text{ολ. συστ}} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Τα αποτελέσματα δείχνουν αύξηση της εντροπίας των δύο αερίων μετά την ανάμιξη ως αποτέλεσμα της μη αντιστρεπτής διεργασίας την οποία υφίστανται.

ΘΕΜΑ 4

α) Υπάρχουν συνολικά δεκαέξι (16) μικροκαταστάσεις που καθορίζονται από τον προσανατολισμό των σπιν των τεσσάρων ατόμων σε σχέση με τη φορά του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Αν γενικά τις εκφράσουμε ως $(S(1), S(2), S(3), S(4))$, είναι οι εξής:

$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ με ενέργεια $3A/4 - 4\mu B$

$(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ με ενέργεια $3A/4 + 4\mu B$

$(1/2, 1/2, -1/2, 1/2), (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$, με ενέργεια $-A/4 - 2\mu B$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(-1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1/2, 1/2, 1/2, -1/2)$ με ενέργεια $A/4 - 2\mu B$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(-1/2, 1/2, 1/2, -1/2), (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$ με ενέργεια $-A/4$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(1/2, -1/2, 1/2, -1/2), (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2)$ με ενέργεια $-3A/4$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(1/2, 1/2, -1/2, -1/2), (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$ με ενέργεια $A/4$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(-1/2, -1/2, -1/2, 1/2), (1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ με ενέργεια $A/4 + 2\mu B$ (διπλά εκφυλισμένη)

$(-1/2, -1/2, 1/2, -1/2), (-1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ με ενέργεια $-A/4 + 2\mu B$ (διπλά εκφυλισμένη)

β) $Z = \sum g_n \exp(-E_n/K_B T)$ όπου E_n η ενέργεια της n μικροκατάστασης και g_n ο τυχόν παράγοντας εκφυλισμού της (η άθροιση γίνεται πάνω στις μικροκαταστάσεις που έχουν διαφορετική ενέργεια).

$$U = -\partial \ln Z / \partial \beta$$

$$F = -K_B T \ln Z$$

$$M = (1/\beta) \partial \ln Z / \partial B$$

γ) Για $T=0$ και $B=0$, $U = -3A/4$, $F = -3A/4 - K_B T \ln 2$ και $M=0$

Για $T=0$ και $A/\mu \ll B$, $U = 3A/4 - 4\mu B$, $F = 3A/4 - 4\mu B$ και $M = 4\mu$

Για $K_B T \gg A$ και $B=0$, $U=0$, $F = -4K_B T \ln 2$ και $M=0$