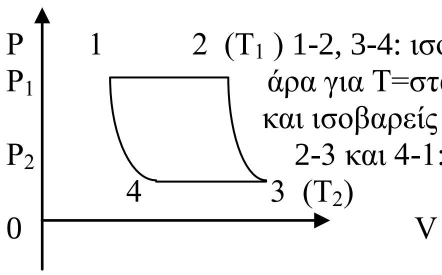
ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ 01-2015

ΘΕΜΑ 1

α) Ο κύκλος λειτουργίας Carnot στο επίπεδο P-V (για υλικό που εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία) θα αποτελείται από δύο ισόθερμες και δύο αδιαβατικές διεργασίες.



1-2, 3-4: ισόθερμες υπό T_1,T_2, αντίστοιχα. Όμως P ανάλογο T^4, άρα για T=σταθ. και P=σταθ. (ανεξάρτητη του V). Άρα είναι και ισοβαρείς οπότε θα να είναι οριζόντιες γραμμές (έστω $P_1>P_2$).
2-3 και 4-1: αδιαβατικές διεργασίες.

Για το συγκεκριμένο μακροσκοπικό σύστημα, ισχύουν οι εκφράσεις:
$U=cVT^4$ και $P=cT^4/3$.

β) Αν θεωρήσουμε ότι T_1 και T_2, αντίστοιχα, είναι οι θερμοκρασίες των δύο δεξαμενών θερμότητας υπό τις οποίες λειτουργεί η μηχανή Carnot ($T_1>T_2$, αφού $P_1>P_2$) μπορούμε να υπολογίσουμε την απόδοσή της n σε ένα κύκλο λειτουργίας της ως συνάρτηση μόνο των παραπάνω θερμοκρασιών ως εξής:
$n=W/Q_{απορρ}$ (εξ ορισμού) (1)
Θερμότητα απορροφάται μόνο στην ισόθερμη 1-2 για να αυξηθεί ο όγκος. Επομένως: $Q_{απορρ}=Q_{1\text{-}2}$. Στις αδιαβατικές διεργασίες, $Q_{2\text{-}3,4\text{-}1}=0$ ενώ θερμότητα εκλύεται στην ισόθερμη 3-4.
Από τον $1^{ο}$ ΘΔ νόμο, $Q_{1\text{-}2}=dU+PdV$ ή $Q_{1\text{-}2}=(cV_2T_1^4-cV_1T_1^4)+cT_1^4/3(V_2-V_1)= 4/3cT_1^4(V_2-V_1)>0$. Παρομοίως θα μπορούσαμε να βρούμε $Q_{3\text{-}4}=4/3cT_2^4(V_4-V_3)<0$.
Επιπλέον, επειδή σε ένα κύκλο λειτουργίας ΔU=0, $W=Q_{1\text{-}2}+Q_{3\text{-}4}$. Με αντικατάσταση στην (1), βρίσκουμε ότι: $n=1+(Q_{3\text{-}4}/Q_{1\text{-}2})=1+(T_2^4/T_1^4)[(V_4-V_3)/(V_2-V_1)]$ (2)
Επομένως, για να βρούμε την απόδοση ως συνάρτηση των T_1 και T_2, μένει να εκφράσουμε τους όγκους συναρτήσει των T_1 και T_2.
Αυτό μπορεί απλά να γίνει με τη χρήση του $1^{ου}$ ΘΔ νόμου στις αδιαβατικές διεργασίες. Πιο συγκεκριμένα: $Q=dU+PdV=0$ ή $4cVT^3dT+cT^4dV+(cT^4/3)dV=0$ ή $4cVT^3dT+(4cT^4/3)dV=0$. Επομένως: $dT/T=-(1/3)dV/V$ ή VT^3=σταθ.
Εφαρμόζοντας τη σχέση που καταλήξαμε για τις δύο αδιαβατικές διεργασίες βρίσκουμε ότι: $V_2T_1^3=V_3T_2^3$ (=σταθ.) και $V_4T_2^3=V_1T_1^3$, τις οποίες αν συνδυάσουμε καταλήγουμε στη σχέση: $V_2/V_3=V_1/V_4$ $[=(T_2/T_1)^3]$. (3)
Επομένως τελικά αντικαθιστώντας την (3) στη (2) βρίσκουμε ότι: $n=1-(T_2/T_1)<1$.

ΘΕΜΑ 2

α) Ο αριθμός μικροκαταστάσεων W θερμικά απομονωμένου συστήματος σχετίζεται με την εντροπία S μέσω της σχέσης $S=K_B\ln W$. (K_B: σταθερά Boltzmann).
Επομένως, $S=K_B\ln[y(N)V^NU^{fN/2}]=K_B[\ln f(N)+N\ln V+(fN/2)\ln U]$.
Επίσης, $1/T=(\partial S/\partial U)_{N,V}=K_BfN/2U$ από όπου $U=fNK_BT/2$ και $C_V=(\partial U/\partial T)_V=fNK_B/2$.
Η μορφή της U είναι σε συμφωνία με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας αφού αν κάθε βαθμός ελευθερίας συνεισφέρει ενέργεια $K_BT/2$ στην εσωτερική ενέργεια

ενός σωματιδίου του συστήματος τότε οι f βαθμοί ελευθερίας του αντιστοιχούν σε εσωτερική ενέργεια $U=fNK_BT/2$ (για τα N σωματίδια).
Στο όριο του απολύτου μηδενός, η U τείνει στο 0 ενώ η S όχι (πιο συγκεκριμένα, τείνει στο μείον άπειρο). Επομένως, δεν ικανοποιεί η έκφραση της εντροπίας τον 3^{ο} ΘΔ νόμο σύμφωνα με τον οποίο στο όριο του απολύτου μηδενός η εντροπία πρέπει να τείνει στην ελάχιστη (μηδενική) τιμή της. Αυτό υποδηλώνει ότι η έκφραση για το W δεν είναι ακριβής για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και επομένως θα έπρεπε να τροποποιηθεί κατάλληλα για να ικανοποιείται ο 3^{ος} ΘΔ νόμος.

β) Αφού στο σύστημα (και άρα και στα υποσυστήματά του) αποκατασταθεί κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, θα πρέπει να υπάρχει οπωσδήποτε θερμική ισορροπία και επομένως οι θερμοκρασίες των δύο υποσυστημάτων A, B έστω T_A και T_B , αντίστοιχα, να εξισωθούν. Επομένως, αφού $U_A=f_AN_AK_BT_A/2$ και $U_{|B}=f_BN_BK_BT_B/2$ και οι βαθμοί ελευθερίας των δύο υποσυστημάτων δε διαφέρουν, προκύπτει απλά ότι: $U_A/U_B=N_A/N_B$ ή $U_A/N_A=U_B/N_B$, δηλαδή ότι η εσωτερική ενέργεια ανά αριθμό σωματιδίων είναι ίδια για τα δύο υποσυστήματα.

ΘΕΜΑ 3

α) Επειδή το ιδανικό αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με θερμική δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας T, η στατιστική συμπεριφορά του περιγράφεται με χρήση της κανονικής κατανομής.
Η συνάρτηση επιμερισμού Z ιδανικού αερίου δίνεται από την έκφραση: $Z=[V^N(2\pi mK_BT)^{3N/2}]/[h^{3N}N!]$ (1)
Εφόσον το αέριο του συστήματός μας αποτελείται από τρία διαφορετικά είδη σωματιδίων (ουσιαστικά είναι μίγμα τριών διαφορετικών αερίων το καθένα με N σωματίδια, μάζας m) τα οποία είναι διακρίσιμα από αυτά των άλλων δύο ειδών (ενώ σωματίδια του ιδίου τύπου είναι μεταξύ τους μη διακρίσιμα), η συνολική Z του μίγματος αερίων θα είναι το γινόμενο των επιμέρους Z για κάθε αέριο με διαφορετικό τύπο σωματιδίων. Επομένως: $Z_{ολ}=Z_AZ_BZ_Γ$, όπου $Z_{A,B,Γ}$ οι επιμέρους συναρτήσεις επιμερισμού για τα αέρια σωματιδίων τύπου A, B και Γ, αντίστοιχα, όπως δίνονται από την έκφραση (1). Τελικά, $Z_{ολ}=[V^{3N}(2\pi mK_BT)^{9N/2}]/[h^{9N}(N!)^3]$.

Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz F δίνεται από τη σχέση $F=-K_BT\ln Z_{ολ}$.
Τελικά, $F=-3K_BNT[\ln(V/N)+(3/2)\ln(2\pi mK_BT)+1-3\ln h]$.
Στη συνέχεια, από τη σχέση $U=-\partial \ln Z/\partial\beta$ (όπου $\beta=1/K_BT$) υπολογίζουμε την εσωτερική ενέργεια $U=9NK_BT/2$.
Από τη σχέση $F=U-TS$, υπολογίζουμε την εντροπία $S=(U-F)/T$.
Τελικά, $S=3K_BN[\ln(V/N)+(3/2)\ln(2\pi mK_BT)-3\ln h+5/2]$.

β) Αν το σύστημα ήταν ένα διαφορετικό αέριο που περιείχε 3N σωματίδια ενός μόνο είδους, τότε $Z=[V^{3N}(2\pi mK_BT)^{9N/2}]/[h^{9N}(3N)!]$.
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που αναφέρονται στο ερώτημα α), βρίσκουμε τελικά ότι: $S'=3K_BN[\ln(V/3N)+(3/2)\ln(2\pi mK_BT)-3\ln h+5/2]$.
Επομένως $S-S'=3K_BN\ln 3>0$, δηλαδή η εντροπία ενός μίγματος αερίων είναι εν γένει μεγαλύτερη από αυτή ενός αερίου όταν περιέχουν τον ίδιο αριθμό σωματιδίων (λόγω του μεγαλύτερου αριθμού μικροκαταστάσεων που είναι διαθέσιμες για τα, διακρίσιμα μεταξύ των διαφορετικών ειδών, σωματίδια του μίγματος και αφού και η διαδικασία ανάμιξης είναι μία μη αντιστρεπτή διεργασία).

ΘΕΜΑ 4

α) Για σύστημα αποτελούμενο από 3 ανεξάρτητα και διακρίσιμα σωματίδια, ο συνολικός αριθμός των δυνατών, διαφορετικών, μικροκαταστάσεων του συστήματος για δύο ισοδύναμους (ισοπίθανους) προσανατολισμούς της μαγνητικής τους ροπής είναι $W=2^3=8$.

Οι 2 μικροκαταστάσεις αφορούν είτε όλες τις ροπές σε μία φορά πχ. προς τα πάνω είτε όλες στην αντίθετη φορά πχ. προς τα κάτω (θεωρώντας ότι αυτές είναι οι δύο δυνατές φορές της μαγνητικής ροπής κάθε σωματιδίου κατά μήκος μιας συγκεκριμένης διεύθυνσης). Τότε η ολική μαγνητική ροπή παίρνει τιμές $M=3\mu_0/2$ και $-3\mu_0/2$, αντίστοιχα.

Οι υπόλοιπες 6 αφορούν οι μεν 3 εναλλάξ δύο από τις ροπές προς τα πάνω και τη μία προς τα κάτω ($M=\mu_0/2$) (λαμβάνοντας υπόψιν τη διακρισιμότητα των σωματιδίων, ανάλογα με το ποιο από τα 3 έχει ροπή προς τα κάτω), οι δες άλλες 3 την ακριβώς αντίθετη διευθέτηση δηλαδή δύο από τις ροπές προς τα κάτω και τη μία προς τα πάνω ($M=-\mu_0/2$) (ανάλογα με το ποιο από τα 3 έχει ροπή προς τα πάνω).

Οι μακροκαταστάσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετική τιμή ολικής μαγνητικής ροπής του συστήματος είναι 4 με τιμές $M=3\mu_0/2$ (όλες οι ροπές προς τα πάνω), $-3\mu_0/2$ (όλες προς τα κάτω), $\mu_0/2$ (δύο προς τα πάνω και μία προς τα κάτω) και $-\mu_0/2$ (δύο προς τα κάτω και μία προς τα πάνω), αντίστοιχα. Επομένως, οι δύο τελευταίες παρουσιάζουν τριπλό εκφυλισμό αφού κάθε μία από αυτές αντιστοιχεί σε τρεις διαφορετικές μικροκαταστάσεις (όπως προαναφέρθηκαν).

β) Έστω ότι η πιθανότητα εύρεσης στην μικροκατάσταση n, είναι P_n. Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$\Sigma P_n=1$ (1) και $\Sigma P_n M_n=\alpha\mu_0$ (2), όπου M_n είναι η ολική μαγνητική ροπή στην μικροκατάσταση n.

Επιπλέον, η εντροπία πληροφορίας δίνεται από την έκφραση $S=-\Sigma P_n \ln P_n$ (1), όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις μικροκαταστάσεις n.

Στη συνέχεια, κάνουμε χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρούμε την πιθανότητα που μεγιστοποιεί την εντροπία πληροφορίας. Επειδή έχουμε δύο συνθήκες, πρέπει να κάνουμε χρήση δύο πολλαπλασιαστών Lagrange, έστω β και γ, οπότε και προκύπτουν δύο νέες εξισώσεις:

$\beta(\Sigma P_n-1)=0$, που ισχύει για κάθε β

και $\gamma(\Sigma P_n M_n-\alpha\mu_0)=0$, που ισχύει για κάθε γ

Αυτές τις δύο εξισώσεις (που ισούται με 0) τις προσθέσουμε στη σχέση (1) και στη συνέχεια αφού παραγωγίσουμε τη νέα σχέση που έχει προκύψει ως προς P_n, θέτουμε την παράγωγο ίση με 0 (αφού θέλουμε την P_n που μεγιστοποιεί την S).

Επομένως, $\partial S/\partial P_n=0$ από όπου προκύπτει ότι: $\beta+\gamma M_n-\ln P_n-1=0$ και λύνοντας ως προς P_n βρίσκουμε ότι $P_n=\exp(1-\beta-\gamma M_n)$ (3)

γ) Οι τιμές των β και γ μπορούν να βρεθούν αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (3) στις σχέσεις (1) και (2).

Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτουν δύο πλέον νέες σχέσεις οπότε για $\alpha=1/2$ (δηλαδή $\Sigma P_n M_n=M=\mu_0/2$) και θέτοντας μια μεταβλητή $x=\exp(\gamma/2)$, καταλήγουμε τελικά σε μια εξίσωση 6^{ου} βαθμού της μορφής $x^6-3x^2-2=0$ της οποίας λύση είναι η $x=2^{1/2}$, δηλαδή $\gamma=\ln 2$. Από τη μία από τις δύο νέες σχέσεις που έχουν προκύψει παραπάνω βρίσκουμε επίσης ότι $\beta=1+\ln(27/2^{3/2})$.

Επιπλέον, βρίσκουμε την εντροπία πληροφορίας $S=\ln(27/4)$ (με $P_n=4/27$).