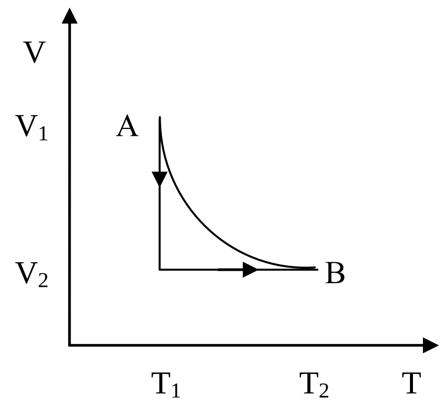
ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 02/2016

ΘΕΜΑ 1

I)

α) “Κύκλος” λειτουργίας - Σχηματικό διάγραμμα



Αρχική κατάσταση (T_1, V_1) (σημείο A) – Τελική κατάσταση (T_2, V_2) (σημείο B)
(έστω $T_1<T_2$ και $V_1>V_2$)

Κλειστή διαδρομή με τρεις διεργασίες για μετάβαση από το A στο B:
Ισόθερμη (υπό σταθερή T_1) - Ισόχωρη (υπό σταθερό V_2)
Διεργασία όπου VT^3=σταθ.

β) Γενικά, $W_{AB}=\int PdV$ για κάθε είδους διεργασία για μετάβαση πχ. από μια κατάσταση A σε μια κατάσταση B.
Εδώ δίνεται η καταστατική εξίσωση του συστήματος $P=cT^4/3$ (ανεξάρτητη του V).
$W_{AB,\ \iota\sigma\acute{o}\theta}=cT_1^4(V_1-V_2)/3$
$W_{AB,\ \iota\sigma\acute{o}\chi}=0$ (V=σταθ.)
$W_{AB,\ (VT^3=\sigma\tau\alpha\theta)} = cT_1^4V_1(V_1/V_2)^{1/3}-1)$ (μετατρέποντας πρώτα την εξάρτηση του P από το T σε εξάρτηση από το V με χρήση της σχέσης VT^3=σταθ.)

II. Για $T<T_c$, δίνονται: $\chi_\mu=(\partial M/\partial B)_T = \{c/[1-(T/T_c)]\} + 3\lambda B^2$
και $(\partial M/\partial T)_B = f(B)/\{T_c[1-(T/T_c)]^2\} - M_0/\{2T_c[1-(T/T_c)]^{1/2}\}$ (με f(B=0)=0).
α) Κάνοντας χρήση των μακροσκοπικών μεταβλητών B, T από τις οποίες εξαρτάται το M και για την M=M(B,T), εκφράζουμε αρχικά το ολικό διαφορικό της μαγνήτισης dM ως άθροισμα των μερικών παραγώγων της ως προς τα B και T.
Στη συνέχεια, αν παραγωγίσουμε εκ νέου τις δύο μερικές παραγώγους ως προς την άλλη μεταβλητή, παίρνουμε τις αντίστοιχες δεύτερες παραγώγους που είναι ίσες (αφού το dM είναι ακριβές, ολικό, διαφορικό εξαρτώμενο μόνο από τα T, B της κατάστασης) και βρίσκουμε ότι:
$\partial/\partial T[(\partial M/\partial B)_T] = c/\{T_c[1-(T/T_c)]^2\}$
$\partial/\partial B[(\partial M/\partial T)_B] = f'(B)/\{T_c[1-(T/T_c)]^2\}$
Εξισώνοντας τις δύο αυτές δεύτερες παραγώγους βρίσκουμε ότι: $f'(B)=c$ και επομένως $f(B)=cB$ (αφού f(B=0)=0).

β) Ολοκληρώνοντας, στη συνέχεια, προσεκτικά την έκφραση του dM ως προς T και B (ξεχωριστά) και κάνοντας χρήση των αρχικών συνθηκών ($M=M_0$ για T=0 (απουσία πεδίου) ενώ M=0 σε θερμοκρασία T_c) καθώς και του f(B) βρίσκουμε την καταστατική εξίσωση του συστήματος $M=M(T,B)$: $M(T,B)= M_0[1-(T/T_c)]^{1/2}+cB/[1-(T/T_c)]+\lambda B^3$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν θεωρήσουμε ότι ένας αριθμός τμημάτων της αλυσίδας n_1 είναι προσανατολισμένος προς τη μία κατεύθυνση του άξονα z (έστω την "θετική") (τα υπόλοιπα $n_2=N-n_1$ θα είναι προς την "αρνητική") και ότι το μήκος της αλυσίδας είναι τότε $L=d(n_1-n_2)=d(2n_1-N)$, κάνοντας χρήση της μικροκανονικής κατανομής, βρίσκουμε ότι το πλήθος των μικροκαταστάσεων/"διευθετήσεων" της αλυσίδας W θα είναι: $W=N!/[n_1!(N-n_1)!]$ (αριθμός τρόπων για να επιλέξουμε n_1 από τα N).

$S=K_B \ln W$

β) Κάνοντας χρήση της σχέσης: $\delta W=-FdL$ και της θεμελιώδους ταυτότητας της θερμοδυναμικής βρίσκουμε ότι: $F=-T(\partial S/\partial L)_{N,U}=-T(\partial S/\partial n_1)(\partial n_1/\partial L)$ από όπου προκύπτει άμεσα ότι:
$F=-(K_BT/2d)\ln[(N-n_1)/n_1]$.

γ) Από τη σχέση του ερωτήματος β), βρίσκουμε ότι: $n_1=N/\{1+\exp[(-2dF)/K_BT]\}$,
και $L=Nd\tanh(dF/K_BT)$.

Στα όρια $T\rightarrow 0$ και $T\rightarrow\infty$, n_1/N~1 και ~N/2, αντίστοιχα.

Για T>> (και $K_BT>>dF$), η σχέση για το L οδηγεί στο νόμο του Hooke: L ανάλογο του F ($L\sim Nd^2F/K_BT$).

ΘΕΜΑ 3

α) Κάνουμε χρήση της κανονικής συλλογής, βρίσκουμε με βάση τους εκφυλισμούς κάθε τύπου θέσης ότι $\zeta=0{,}05M+0{,}20M\exp(-\beta\varepsilon)+0{,}75M\exp(-2\beta\varepsilon)$ (και αφού M>>N ώστε να μην υπάρχει προτίμηση για κάθε άτομο να καταλαμβάνει συγκεκριμένη θέση στην επιφάνεια του στερεού).
$Z=\zeta^N$ (διακρίσιμα, όμοια, και ανεξάρτητα άτομα).

β) $N_\Gamma/N_A=P_\Gamma/P_A=15\exp(-2\beta\varepsilon)$ (όπου η κάθε πιθανότητα δίνεται από τον αντίστοιχο παράγοντα Boltzmann προς την συνάρτηση επιμερισμού)

γ) $U=-\partial \ln Z/\partial\beta$
$F=-K_BT\ln Z$
$S=(U-F)/T$
$C_V=(\partial U/\partial T)_V$
(Για το όριο $K_BT<<\varepsilon$ λαμβάνουμε υπόψη ότι μόνο οι δύο χαμηλότερες ενεργειακά θέσεις 0 και ε μπορούν να καταληφθούν από άτομα και άρα στη Z κρατάμε μόνο τους δύο πρώτους όρους της).

δ) $P_\Gamma=75\%$ (στο όριο $K_BT>>\varepsilon$) (ισοπίθανες όλες οι θέσεις για ένα άτομο).

ε) $S(T\rightarrow\infty)=K_B\ln M^N$ (μέγιστη, με M θέσεις για N άτομα).

ΘΕΜΑ 4

Ι. Γνωρίζουμε ότι $\Phi=-PV$ και $\Phi=-K_BT\ln Z_G$. Επομένως, $PV=K_BT\ln Z_G$ (1)
Επίσης, στην κατανομή Fermi-Dirac, $\langle n_i\rangle=1/\{\exp[(\beta)(\varepsilon_i-\mu)]+1\}$.
Επομένως, $[1-\langle n_i\rangle]=1/\{\exp[(\beta)(\mu-\varepsilon_i)]+1\}$.
Από τον ορισμό της Z_G (ισχύει και η σχέση $\langle n_i\rangle=\partial\ln Z_G/\partial(\mu-\varepsilon_i)$) βρίσκουμε εύκολα για σύστημα φερμιονίων ότι: $Z_G=\Pi\{\exp[(\beta)(\mu-\varepsilon_i)]+1\}$ (για όλες τις σωματιδιακές καταστάσεις i) αφού σε κάθε σωματιδιακή κατάσταση μπορεί να βρεθεί είτε ένα φερμιόνιο ή να είναι άδεια.
Επομένως, $\ln Z_G=\Sigma\ln\{1+\exp[(\beta)(\mu-\varepsilon_i)]\}$ (2)
Συνδυάζοντας τις (1), (2), βρίσκουμε άμεσα τη ζητούμενη σχέση: $PV=-K_BT\sum\ln[1-\langle n_i\rangle]$ για το αέριο φερμιονίων.

Στο κλασικό όριο, $\langle n_i\rangle<<1$. Επομένως, με χρήση της προσεγγιστικής σχέσης $\ln(1+x)\approx x$ (για x<<), βρίσκουμε αρχικά ότι: $\ln(1-\langle n_i\rangle)\approx-\langle n_i\rangle$ και, με αντικατάσταση στη σχέση που βρήκαμε στο (Ι), τελικά ότι: $PV=-K_BT\sum(-\langle n_i\rangle)=NK_BT$ (αφού $\sum\langle n_i\rangle=N$). Επομένως, το αέριο φερμιονίων συμπεριφέρεται πλέον ως κλασικό ιδανικό αέριο.

ΙΙ. Το σύστημα των φερμιονίων/μποζονίων (που είναι μη διακρίσιμα κβαντικά σωματίδια) μελετάται με την κανονική συλλογή αφού είναι σε επαφή με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας Τ.

α) Εφόσον τα 2 φερμιόνια μπορεί να καταλάβουν 3 δυνατές ενεργειακές στάθμες με ενέργειες $E_n=n\varepsilon$ ($n=0, 1, 2$ και ε=σταθ.), οι εφικτές μικροκαταστάσεις του συστήματος είναι 3 συνολικά, με ενέργειες $E_{ο\lambda1}=\varepsilon$ (1 στην E_0 και 1 στην E_1), $E_{ο\lambda2}=2\varepsilon$ (1 στην E_0 και 1 στην E_2) και $E_{ο\lambda3}=3\varepsilon$ (1 στην E_1 και 1 στην E_2).

β) $Z=\Sigma\exp(-\beta E_r)$ με άθροισμα για όλες τις μικροκαταστάσεις r και $\beta=1/K_BT$ (Για κάθε μικροκατάσταση, η αντίστοιχη ενέργειά της δίνεται από τη γενική έκφραση $E_r=\Sigma n_iE_i$, όπου n_i ο αριθμός σωματιδίων στην στάθμη ενέργειας E_i). Αντικαθιστώντας τις ενέργειες των μικροκαταστάσεων που υπολογίσαμε στο α) βρίσκουμε ότι:
$Z=\exp(-\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)$.

γ) Το μέσο πλήθος κατάληψης $\langle n_i\rangle$ της ενεργειακής στάθμης i δίνεται από τη σχέση: $\langle n_i\rangle=(1/Z)\Sigma n_i\exp(-\beta E_r)$ όπου το άθροισμα γίνεται πάνω σε όλα τα πλήθη κατάληψης της στάθμης i στις μικροκαταστάσεις r.
Κάνοντας χρήση των υπολογισμών στο ερώτημα α), βρίσκουμε ότι:
$\langle n_0\rangle=(1/Z)[\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-\beta\varepsilon)]$ και $\langle n_1\rangle=(1/Z)[\exp(-3\beta\varepsilon)+\exp(-\beta\varepsilon)]$,
$\langle n_2\rangle=(1/Z)[\exp(-3\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)]$.

Για $T\to0$, τα φερμιόνια θα τείνουν να καταλάβουν τις δύο χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες (ανά 1 σε κάθε μία) και άρα $\langle n_0\rangle=\langle n_1\rangle=1$, $\langle n_2\rangle=0$, ενώ για $T\to\infty$ όλες οι στάθμες θα έχουν ίσα μέσα πλήθη κατάληψης $\langle n_0\rangle=\langle n_1\rangle=\langle n_2\rangle=2/3$ ("ισοκατανομή των φερμιονίων στις διαθέσιμες στάθμες", άρα συμπεριφέρονται ως "κλασσικά" σωμάτια). Επίσης, για κάθε Τ, θα ισχύει ότι: $\langle n_0\rangle+\langle n_1\rangle+\langle n_2\rangle=2$.

δ) Για το σύστημα των δύο ανεξάρτητων μποζονίων, οι εφικτές μικροκαταστάσεις του συστήματος είναι 6 συνολικά, με ενέργειες $E_{ο\lambda1}=0$ (και τα 2 στην E_0), $E_{ο\lambda2}=2\varepsilon$ (και τα 2 στην E_1), $E_{ο\lambda3}=4\varepsilon$ (και τα 2 στην E_2), $E_{ο\lambda4}=\varepsilon$ (1 στην E_0 και 1 στην E_1), $E_{ο\lambda5}=2\varepsilon$ (1 στην E_0 και 1 στην E_2) και $E_{ο\lambda6}=3\varepsilon$ (1 στην E_1 και 1 στην E_2).

$Z=1+\exp(-\beta\varepsilon)+2\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)+\exp(-4\beta\varepsilon)$.

$\langle n_0 \rangle = (1/Z)[2+\exp(-\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)]$ και $\langle n_1 \rangle = (1/Z)[\exp(-\beta\varepsilon)+2\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)]$,
$\langle n_2 \rangle = (1/Z)[\exp(-2\beta\varepsilon)+2\exp(-4\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)]$.

Για $T \to 0$, τα μποζόνια θα τείνουν να καταλάβουν τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη και άρα $\langle n_0 \rangle = 2$, $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = 0$, ενώ για $T \to \infty$ όλες οι στάθμες θα έχουν ίσα μέσα πλήθη κατάληψης $\langle n_0 \rangle = \langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = 2/3$ ("ισοκατανομή των μποζονίων στις διαθέσιμες στάθμες", άρα συμπεριφέρονται ως "κλασσικά" σωμάτια). Επίσης, για κάθε T, θα ισχύει ότι: $\langle n_0 \rangle + \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = 2$.