# ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ 07-01-2014

## ΘΕΜΑ 1

α) Ο παράγοντας N! στην έκφραση της συνάρτησης επιμερισμού Z οφείλεται στη διόρθωση του αριθμού των μικροκαταστάσεων του κλασικού ιδανικού αερίου εξαιτίας της μη διακρισιμότητας των σωματιδίων του (ως "κλασικά", μη σαφώς εντοπισμένα, σωματίδια στον όγκο του αερίου).

β) Από την έκφραση της Z του ιδανικού αερίου ($Z=[V^N(2\pi mK_BT)^{3N/2}]/[h^{3N}N!]$), υπολογίζουμε αρχικά, στα πλαίσια της κανονικής κατανομής, την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz $F=-KT\ln Z$ (K η σταθερά του Boltzmann).

Τελικά, $F=-NKT[\ln(VN)+(3/2)\ln(2\pi mKT)+1-3\ln h]$.

Στη συνέχεια, από τη σχέση $U=-\partial\ln Z/\partial\beta$ (όπου $\beta=1/KT$) υπολογίζουμε την εσωτερική ενέργεια $U=3NKT/2$.

Από τη σχέση $F=U-TS$, υπολογίζουμε την εντροπία $S=(U-F)/T$. Τελικά, $S=KN[\ln(V/N)+(3/2)\ln(2\pi mKT)-3\ln h+5/2]$.

Αντίστοιχα από τις σχέσεις $H=U+PV$ (όπου $PV=NKT$: καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου ή $P=-\partial F/\partial V$) και $G=F+PV$ υπολογίζουμε την ενθαλπία H και την ελεύθερη ενέργεια Gibbs G.

Τελικά, $H=5NKT/2$ και $G= -NKT[\ln(VN)+(3/2)\ln(2\pi mKT)-3\ln h]$.

γ) Η τελική θερμοκρασία του συστήματος των 2 αερίων θα υπολογιστεί από την αρχή διατήρησης της ολικής εσωτερικής ενέργειας πριν και μετά την ανάμιξή τους, εφόσον όλο το σύστημα είναι θερμικά απομονωμένο από το περιβάλλον.

Επομένως, $U_1(T_1)+U_2(T_2)=U_{ολ(1+2)}(T)$. Με χρήση της έκφρασης της U από το ερώτημα β, υπολογίζεται η $T_{(τελ)}=(N_1T_1+N_2T_2)/(N_1+N_2)$.

Για το κάθε αέριο $\Delta S=S_{τελ}-S_{αρχ}=NK\ln(V_{τελ}/V_{αρχ})+(3NK/2)\ln(T_{τελ}/T_{αρχ})$ (με χρήση της έκφρασης της S από το ερώτημα β).

Επομένως για το αέριο 1, $\Delta S_1=N_1K\ln[(V_1+V_2)/V_1]+(3N_1K/2)\ln(T_{τελ}/T_1)$.

Ομοίως για το αέριο 2, $\Delta S_2=N_2K\ln[(V_1+V_2)/V_2]+(3N_2K/2)\ln(T_{τελ}/T_2)$.

$\Delta S_{ολ}=\Delta S_1+\Delta S_2>0$ (υποδηλώνει ότι η ανάμιξη των 2 αερίων είναι μη αντιστρεπτή διεργασία που οδηγεί, με την επίτευξη εκ νέου θερμοδυναμικής ισορροπίας, σε αύξηση της ολικής εντροπίας).

δ) Αν αρχικά $T_1=T_2=T$, τότε $T_{τελ}=T$. Επομένως, $\Delta S_1=N_1K\ln[(V_1+V_2)/V_1]$ και $\Delta S_2=N_2K\ln[(V_1+V_2)/V_2]$ και $\Delta S_{ολ}=\Delta S_1+\Delta S_2>0$.

Αν αντίστοιχα $N_1=N_2=N/2$ και $V_1=V_2=V/2$, τότε $\Delta S_1=(NK/2)\ln 2+(3NK/4)\ln(T_{τελ}/T_1)$ και $\Delta S_2=(NK/2)\ln 2+(3NK/4)\ln(T_{τελ}/T_2)$, με $T_{τελ}=(T_1+T_2)/2$ και $\Delta S_{ολ}=\Delta S_1+\Delta S_2>0$.

Σε αυτήν την περίπτωση, $\Delta\Omega=\Omega_{τελ/}\Omega_{αρχ}=2^N[(T_1+T_2)^2/4T_1T_2]^{3N/4}$ (από τη γενική έκφραση $S=K\ln\Omega$).

## ΘΕΜΑ 2

α) Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με θερμική δεξαμενή σταθερής θερμοκρασίας, η στατιστική συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται με χρήση της κανονικής κατανομής.

Για ένα σωματίδιο, $\zeta=\sum g_n\exp[-\beta\varepsilon_n]$. Το άθροισμα $\sum$ είναι για όλες τις σωματιδιακές ενεργειακές καταστάσεις (n=1,2,3,4) ενώ $g_n$ είναι ο εκφυλισμός της αντίστοιχης κατάστασης. Τελικά, $\zeta=1+2\exp(-\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)$.

β) Η μέση ενέργεια ανά σωματίδιο είναι $<\varepsilon>=U/N= -\partial \ln\zeta/\partial\beta$. Τελικά προκύπτει ότι,
$<\varepsilon>=\varepsilon[2\exp(-\beta\varepsilon)+2\exp(-2\beta\varepsilon)+3\exp(-3\beta\varepsilon)]/[1+2\exp(-\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)]$.
γ) $f=-KT\ln\zeta=-KT\ln[1+2\exp(-\beta\varepsilon)+\exp(-2\beta\varepsilon)+\exp(-3\beta\varepsilon)]$.
δ) $s=(<\varepsilon>-f)/T$.
ε) Γενικά, $P_{3\varepsilon}=\exp(-3\beta\varepsilon)/\zeta$ και $P_0=1/\zeta$.
Για $KT>>\varepsilon$, $P_{3\varepsilon}=P_0=1/5$ (ίδια πιθανότητα κατάληψης) και $<\varepsilon>=7\varepsilon/5$.
Αντίστοιχα για $KT<<\varepsilon$, $P_{3\varepsilon}=0$ και $P_0=1$ (μόνο η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη είναι κατηλειμμένη) ενώ $<\varepsilon>=0$.
στ) Αν $P_0=1.2P_{3\varepsilon}$ τότε $T\approx16\varepsilon/K$.
ζ) $C_V=(\partial U/\partial T)_V=N(\partial<\varepsilon>/\partial\beta)_V(\partial\beta/\partial T)_V=N(\partial<\varepsilon>/\partial\beta)_V(-K\beta^2)$.
Τόσο σε πολύ χαμηλές όσο και σε πολύ υψηλές T για ένα σύστημα με πεπερασμένο (και μικρό) αριθμό ενεργειακών επιπέδων, με απλούς συλλογισμούς καταλήγουμε στο ότι $C_V\approx0$.

**ΘΕΜΑ 3**

α) Για 4 ανεξάρτητα (με σαφή προσανατολισμό των ίσων, κατά μέτρο, μαγνητικών τους ροπών $\mu_0$ σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο B και επομένως σαφώς εντοπισμένα και διακρίσιμα) σωματίδια, ο αριθμός των δυνατών, διαφορετικών, μικροκαταστάσεων τους για δύο ισοδύναμους (ισοπίθανους) προσανατολισμούς είναι $\Omega=2^4=16$.
β,γ) Οι (μάκρο)καταστάσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετική ολική μαγνήτιση του συστήματος των 4 σωματιδίων, ανάλογα με τον προσανατολισμό των μαγνητικών τους ροπών, είναι 5.
Οι 2 αφορούν είτε όλα τα σπιν παράλληλα με το B είτε όλα αντιπαράλληλα. Τότε η ολική μαγνήτιση και η ενέργεια παίρνουν τιμές $M=4\mu_0$, $E=-4\mu_0B$ και $-4\mu_0$ και $4\mu_0B$, αντίστοιχα.
Οι υπόλοιπες 3 αφορούν τα τρία σπίν παράλληλα και το ένα αντιπαράλληλο ($M=2\mu_0$, $E=-2\mu_0B$ και αντιστοιχεί σε 4 μικροκαταστάσεις λόγω διακρισιμότητας των σωματιδίων, ανάλογα με το ποιο από τα 4 έχει το σπιν αντιπαράλληλο), τα τρία σπίν αντιπαράλληλα και το ένα παράλληλο ($M=-2\mu_0$, $E=2\mu_0B$ και αντιστοιχεί σε 4 μικροκαταστάσεις, ανάλογα με το ποιο από τα 4 σωματίδια έχει το σπιν παράλληλο) και τα δύο σπίν παράλληλα με τα άλλα δύο αντιπαράλληλα ($M=0$, $E=0$ και αντιστοιχεί σε 6 μικροκαταστάσεις, ανάλογα με τα ποια από τα 2 σωματίδια έχουν, αντίστοιχα, τα σπιν παράλληλα ή αντιπαράλληλα).
δ) $<M>=0$ (γενικά $<M>=\Sigma<\mu_i>$ για $i=1,2,3,4$ με $<\mu_i>=\Sigma P_j\mu_{0,j}=0$, για $j=1,2$ που αντιστοιχεί στους δύο δυνατούς, ισοπίθανους, προσανατολισμούς της μαγνητικής ροπής κάθε σωματιδίου). Αντιστοίχως, $<M^2>=4\mu_0^2$ ($<M^2>=<(\Sigma\mu_i)^2>$ με $<\mu_i^2>=\Sigma P_j\mu_{0,j}^2=\mu_0^2$ καθώς και λόγω της ανεξαρτησίας των σπιν των σωματιδίων).
Επίσης, $<E>=<M>B=0$ και $<E^2>=<M^2>B^2$.
Τέλος, $\sigma_M^2=<M^2>-<M>^2=4\mu_0^2$ και $\sigma_E^2=4\mu_0^2B^2$.