ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ 2017-2018

ΘΕΜΑ 1

I. Με χρήση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής, του στοιχειώδους έργου $\delta W=-F_\iota dx$, όπου F_ι η ασκούμενη "δύναμη", και του ορισμού της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz $F=U-TS$ βρίσκουμε ότι $dF=F_\iota dx-SdT$ (T, x οι ανεξάρτητες μεταβλητές) (1). Με ανάπτυγμα σε μερικές παραγώγους και παραγώγιση των συντελεστών F_ι και S ως προς την άλλη μεταβλητή (T και x, αντίστοιχα) βρίσκουμε ότι $\partial F_\iota/\partial T=\partial S/\partial x=\partial^2F/\partial x\partial T$. Με ολοκλήρωση, υπολογίζεται η εντροπία που δίνεται τελικά από τη σχέση $S(d,T)=c[3d_0/2-(d^2/2d_0)-(d_0^2/d)] - cTd_0[3/2+(d^2/2d_0^2)-(2d_0/d)]\alpha_0+s(T,d_0)$
Αντίστοιχα, από τη σχέση (1) με ολοκλήρωση προκύπτει η F που δίνεται τελικά από τη σχέση $F(d,T)=cT[(d^2/2d_0)+(d_0^2/d)-3d_0/2]+f(T,d_0)$.
Τέλος, η θερμότητα $Q=T\Delta S=-cTd_0[1+(5T\alpha_0/2)]$.

II. Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής για ένα παραμαγνητικό υλικό μοναδιαίου όγκου εντός μαγνητικού πεδίου H γράφεται ως: $\delta Q=dU-HdM$, καθώς λαμβάνεται υπόψη το στοιχειώδες μαγνητικό έργο $\delta W=-HdM$. Με ανάπτυγμα σε μερικές παραγώγους, $\delta Q=(\partial U/\partial T)_M dT+[(\partial U/\partial M)_T-H]dM$. Επειδή η εσωτερική του ενέργεια U (λόγω αλληλεπίδρασης των ατόμων του με το μαγνητικό πεδίο) είναι ανεξάρτητη του M για σταθερή T, $(\partial U/\partial M)_T=0$. Αντίστοιχα, η θερμοχωρητικότητά του υπό σταθερή μαγνήτιση $C_M=(\delta Q/\partial T)_M=(\partial U/\partial T)_M$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη των T, M). Επομένως, $\delta Q=(\partial U/\partial T)_M dT+[(\partial U/\partial M)_T-H]dM$. Αφού το υλικό υπόκειται όμως σε αδιαβατική διεργασία, , $\delta Q=0$. Επομένως, $C_M dT-HdM=0$. Χρησιμοποιώντας και την καταστατική εξίσωση του υλικού που δίνεται από τη σχέση $M=cH/T$ (c=σταθ.), βρίσκουμε ότι: $C_M dT-(MT/c)dM=0$. Με ολοκλήρωση, βρίσκουμε την τελική θερμοκρασία του υλικού όταν έχει πλήρως απομαγνητιστεί (M=0) να δίνεται από τη σχέση $T_{\tau\varepsilon\lambda}=T_1\exp(-M_1^2/2cC_M)$ (ως συνάρτηση των T_1, M_1 και C_M).

III. Εφόσον ο κύκλος Carnot είναι αντιστρεπτός, η μεταβολή της εντροπίας του ενός συστήματος (που λειτουργεί ως δεξαμενή θερμότητας) με την ανταλλαγή θερμότητας με το άλλο έως την επίτευξη κοινής, τελικής, θερμοκρασίας T, είναι ίδια αριθμητικά (ή αλλιώς είναι ίση και αντίθετη) με τη μεταβολή που υφίσταται το άλλο σύστημα. Επομένως, $\Delta S_1=-\Delta S_2$ αφού $\Delta S_1+\Delta S_2=0$.
Όμως $\Delta S=\int dS=\int \delta Q/T=\int CdT/T$ αφού το κάθε σύστημα έχει θερμοχωρητικότητα C (υπό σταθερό όγκο) η οποία είναι και ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία του.
Επομένως, $\int CdT/T$ για το σύστημα 1 (με όρια T_1 και T) = $-\int CdT/T$ για το σύστημα 2 (με όρια T_2 και T). Με ολοκλήρωση στα παραπάνω όρια, βρίσκουμε την τελική θερμοκρασία $T=(T_1T_2)^{1/2}$.
Αντίστοιχα, το παραγόμενο έργο W θα βρεθεί από το πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής: $\delta Q=dU+\delta W$ όπου όμως $dU=0$ αφού, συνολικά, το σύστημα έχει σταθερή U στη διάρκεια του κύκλου Carnot. Επομένως, $W=Q=(\int CdT)_1+(\int CdT)_2$ (με όρια T_1 και T για το σύστημα 1 και T_2 και T για το σύστημα 2, αντίστοιχα). Τελικά βρίσκουμε ότι το έργο είναι $W=-C(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})^2$ (>0).

ΘΕΜΑ 2

α) Ο αριθμός μικροκαταστάσεων του συστήματος που αποτελείται από τα δύο ανεξάρτητα παραμαγνητικά υλικά με N_1 και N_2 δίπολα, αντίστοιχα, προκύπτει από το γινόμενο του αριθμού μικροκαταστάσεων κάθε επιμέρους υλικού (καθώς είναι ανεξάρτητα). Για ένα τέτοιο υλικό με N πχ. δίπολα μαγνητικής ροπής μέτρου μ που καθένα μπορεί να προσανατολιστεί παράλληλα ή αντιπαράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο B, ο αριθμός μικροκαταστάσεων του W θα δίνεται από το πλήθος των συνδυασμών των N ανά n_+ όπου n_+ είναι ο αριθμός διπόλων που είναι προσανατολισμένα παράλληλα στο πεδίο ($N=n_++n_-$, n_- όσα είναι αντιπαράλληλα στο πεδίο (1)).

Επομένως $W=N!/[(n_+!)(n_-!)]$ (2). Αν θέλουμε να εκφράσουμε αυτόν τον αριθμό ως συνάρτηση της μαγνήτισης M, βρίσκουμε αρχικά το M ως συνάρτηση των n_+, n_-. Το M δίνεται από τη σχέση: $M=\mu n_+-\mu n_-$ (3) Αντικαθιστώντας και το n_- από τη σχέση (1), βρίσκουμε ότι $n_+=1/2(M/\mu+N)$ (4)
Επομένως, αν εφαρμόσουμε τη σχέση (2) για το κάθε υλικό βρίσκουμε τα W_1 και W_2, αντίστοιχα, και το συνολικό W ως το γινόμενο τους:
$W=W_1W_2=\{(N_1!)/[(1/2(M_1/\mu+N_1)!(1/2(N_1-M_1/\mu)!]\}\{(N_2!)/[(1/2(M_2/\mu+N_2)!(1/2(N_2-M_2/\mu)!]\}$ (5).

β) Αν $N_1=3$ και $N_2=5$ ($N=N_1+N_2=8$) και $U=-2\mu B$ ($U=U_1+U_2$) τότε $M=M_1+M_2=2\mu$ (αφού $U=-MB$).
Επομένως, για τη συγκεκριμένη U και M του συστήματος, ο συνολικός αριθμός μικροκαταστάσεων του μπορεί εύκολα να βρεθεί από τις σχέσεις (2) και (4) ως $W=8!/[(5!)(3!)]=56$.
Τότε, $M_1=-3\mu$, $-\mu$, μ, 3μ (αφού τα 3 δίπολα μπορούν να είναι όλα παράλληλα, όλα αντιπαράλληλα, δύο παράλληλα και ένα αντιπαράλληλο, ένα παράλληλο και δύο αντιπαράλληλα) ενώ $M_2=-5\mu$, -3μ, $-\mu$, μ, 3μ, 5μ (αφού τα 5 δίπολα μπορούν να είναι όλα παράλληλα, όλα αντιπαράλληλα, τέσσερα παράλληλα και ένα αντιπαράλληλο, ένα παράλληλο και τέσσερα αντιπαράλληλα, τρία παράλληλα και δύο αντιπαράλληλα, δύο παράλληλα και τρία αντιπαράλληλα).
Αντίστοιχα, $U_1=3\mu B$, μB, $-\mu B$, $-3\mu B$ και $U_2=5\mu B$, $3\mu B$, μB, $-\mu B$, $-3\mu B$, $-5\mu B$.
Για $U=-2\mu B$ και $M=2\mu$, το M_1 μπορεί εν γένει να πάρει και τις 4 δυνατές τιμές του που καταγράφονται πιο πάνω ενώ το M_2 μπορεί να πάρει μόνο τις 4 από τις 6 δυνατές τιμές του που καταγράφονται πιο πάνω και, πιο συγκεκριμένα, τις $-\mu$, μ, 3μ, 5μ. Προφανώς όμως, θα πρέπει να συνδυαστούν κατάλληλα οι τιμές των M_1 και M_2 ώστε να δίνουν πάντα συνολικό $M=2\mu$.
Σε κάθε δυνατή τιμή των M_1 και M_2 (που μπορούν να συνδυαστούν για να προκύψει $U=-2\mu B$), αντιστοιχεί το παρακάτω πλήθος μικροκαταστάσεων που βρίσκεται από το γινόμενο των W_1, W_2:
Για $M_1=-\mu$, $M_2=3\mu$: $W=W_1W_2=\{3!/[(1!)(2!)]\{5!/[(4!)(1!)]\}=15$.
Για $M_1=\mu$, $M_2=\mu$: $W=W_1W_2=\{3!/[(2!)(1!)]\{5!/[(3!)(2!)]\}=30$.
Για $M_1=3\mu$, $M_2=-\mu$: $W=W_1W_2=\{3!/[(3!)(0!)]\{5!/[(2!)(3!)]\}=10$.
Για $M_1=-3\mu$, $M_2=5\mu$: $W=W_1W_2=\{3!/[(0!)(3!)]\{5!/[(5!)(0!)]\}=1$.
Το συνολικό άθροισμα των τεσσάρων επιμέρους W είναι πράγματι 56.

γ) Η εντροπία S του συστήματος δίνεται από τη σχέση $S=K_B\ln W$ (K_B: σταθερά Boltzmann) όπου το W δίνεται από τη σχέση (5) ενώ $U_1=-M_1B$ και $U_2=-M_2B$.
Με αντικατάσταση των $M_1=-U_1/B$ και $M_2=-U_2/B$ και χρήση της προσέγγισης του Stirling $\ln N!\approx N\ln N-N$ (για N>>, αφού τα N_1 και N_2 είναι *πολύ μεγάλοι* αριθμοί), βρίσκουμε τελικά την S ως συνάρτηση των N_1, N_2, U_1, U_2, μ και B, από την παρακάτω (προσεγγιστική) σχέση:
$S\approx-K_BN_1(u\ln u+(1-u)\ln(1-u)\}-K_BN_2(z\ln z+(1-z)\ln(1-z)\}$ (ή $S=S_1(u)+S_2(z)$ αφού η S είναι εκτατική μεταβλητή),
όπου $u=(1/2)-(U_1/2N_1\mu B)$
και $z=(1/2)-(U_2/2N_2\mu B)$.
Όταν η U του συστήματος είναι δεδομένη, η S προφανώς μεγιστοποιείται για $U_1=N_1U/N$ (και φυσικά για $U_2=N_2U/N$). Αυτό εύκολα αποδεικνύεται και από το μηδενισμό της ππαραγώγου του S ως προς τη μία ανεξάρτητη μεταβλητή πχ. τη U_1 (αφού $U_1+U_2=U$=σταθερή και $dU=d(U_1+U_2)=0$ τότε $dU_2=-dU_1$). Με απλές πράξεις βρίσκουμε: $U_1/U_2=N_1/N_2$, από όπου προκύπτει ότι $U_1=N_1U/N$.

δ) Χρησιμοποιούμε τη σχέση της S που βρήκαμε στο ερώτημα γ για *ένα* παραμαγνητικό υλικό:
$S\approx-K_BN_1(u\ln u+(1-u)\ln(1-u)\}$, (δεν χρειάζεται τώρα ο δείκτης 1 στα μεγέθη N, U της μεταβλητής u).
Για να υπολογίσουμε την θερμοκρασία T, χρησιμοποιούμε τη σχέση $1/T=(\partial S/\partial U)$. Με παραγώγιση της S ως προς U, βρίσκουμε τελικά ότι: $T=(2\mu B)/K_B\ln[(N\mu B-U)/(N\mu B+U)]$.
Λύνουμε ως προς U την παραπάνω σχέση για να την εκφράσουμε ως συνάρτηση του T και βρίσκουμε τελικά ότι: $U=-N\mu B\tanh(\mu B/K_BT)$.
Η θερμοχωρητικότητα (υπό σταθερό B) $C_B=(\partial U/\partial T)_B=(N\mu^2B^2)/[K_BT^2\cosh^2(\mu B/K_BT)]$.

ΘΕΜΑ 3

α) Καθώς ο ταλαντωτής βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με θερμική δεξαμενή θερμοκρασίας T, χρησιμοποιούμε την κανονική συλλογή.

Για να υπολογίσουμε τη μέση ενέργεια του ταλαντωτή, βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση επιμερισμού του η οποία δίνεται γενικά από τη σχέση $Z=\Sigma g_n \exp(-E_n/K_BT)$ όπου E_n η ενέργεια της n μικροκατάστασης και g_n ο τυχόν παράγοντας εκφυλισμού της (η άθροιση γίνεται πάνω στις μικροκαταστάσεις που έχουν διαφορετική ενέργεια). Στην περίπτωση του ταλαντωτή δεν υπάρχει εκφυλισμός και αθροίζουμε πάνω στα ενεργειακά του επίπεδα $E_n=(n+1/2)\hbar\omega$ (n=0,1,2,…)

$Z=\Sigma\exp(-E_n/K_BT)$, όπου το άθροισμα είναι ως προς το n που παίρνει τιμές από 0 έως άπειρο.

Η παραπάνω σειρά είναι μια σειρά απείρων όρων της μορφής $\Sigma\exp(-\alpha x)$ (όπου x από 0 έως άπειρο) που ισούται με $a_1/(1-\lambda)$ (όπου a_1 ο πρώτος όρος της, λ ο λόγος της ($|\lambda|<1$) και α: θετική σταθερά).

Τελικά, βρίσκουμε ότι: $Z=1/\{2\sinh(\hbar\omega/2K_BT)\}$ (χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$.)

Η μέση ενέργεια δίνεται από τη σχέση $<E>=-\partial\ln Z/\partial\beta$ (όπου $\beta=1/K_BT$).

Τελικά, βρίσκουμε ότι: $<E>=(\hbar\omega/2)\coth(\hbar\omega/2K_BT)$.

Στα όρια των πολύ χαμηλών θερμοκρασιών $[(K_BT/\hbar\omega)<<1)]$, $<E>\approx\hbar\omega/2$ (αφού $\coth x\approx 1$ για $x>>1$)

Στα όρια των πολύ υψηλών θερμοκρασιών $[(K_BT/\hbar\omega)>>1]$, $<E>\approx K_BT$ (αφού $\coth x\approx x^{-1}$ για $x<<1$).

Στις πολύ χαμηλές θερμοκρασίες, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη βασική κατάσταση (n=0) ενώ σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες η μέση ενέργεια είναι ανάλογη της θερμοκρασίας του T.

β) $Z=\Sigma\Sigma\exp(-E_n/K_BT)$ όπου το διπλό άθροισμα είναι ως προς τα n_x, n_y που παίρνουν τιμές από 0 έως άπειρο και αποτελούν δείκτες ανεξάρτητους ο ένας από τον άλλο, αφού ο κάθε μονοδιάστατος ταλαντωτής ταλαντώνεται με τη δική του συχνότητα στη διεύθυνσή του (x και y, αντίστοιχα).

Δίνεται ότι $E_{n,x}=(n_x+1/2)\hbar\omega_x$ και, αντίστοιχα, ότι $E_{n,y}=(n_y+1/2)\hbar\omega_y$ ενώ $E_n=E_{n,x}+E_{n,y}$.

Επομένως, υπολογίζουμε το κάθε άθροισμα απείρων όρων ανεξάρτητα, και τελικά βρίσκουμε ότι: $Z=1/\{4\sinh(\hbar\omega_x/2K_BT)\sinh(\hbar\omega_y/2K_BT)\}$.

Για $\omega_x=\omega_y$ (όπου παρουσιάζεται εκφυλισμός στη συχνότητα ταλάντωσης των δύο μονοδιάστατων ταλαντωτών που συγκροτούν το διδιάστατο ταλαντωτή), $Z=1/\{4\sinh^2(\hbar\omega_x/2K_BT)\}$.

Αυτή είναι η Z ενός διδιάστατου ταλαντωτή που αποτελείται από δύο ανεξάρτητους μονοδιάστατους ταλαντωτές που ταλαντώνονται σε μία διεύθυνση ο καθένας με κοινή συχνότητα.

γ) Η ενέργεια του συστήματος των N ατόμων που ταλαντώνονται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι U=Mε (M ο αριθμός των κβάντων ενέργειας ε που κατανέμεται στους ταλαντωτές). Το πλήθος των μικροκαταστάσεων του συστήματος δίνεται, ως συνάρτηση των N και M, από τη γενική σχέση $W(M,N)=(N+M-1)!/[(M)!(N-1)!]$, αφού τα M κβάντα μπορούν να θεωρηθούν ως μη διακρίσιμα κβαντικά σωμάτια που κατανέμονται στους ταλαντωτές/άτομα (δηλαδή στα ενεργειακά τους επίπεδα που δίνονται από τη σχέση $E_n=n\varepsilon$), χωρίς κανέναν περιορισμό στο πόσα μπορούν να βρεθούν σε κάθε επίπεδο (όπως, αντίστοιχα, ισχύει και για τα μποζόνια).

Αν N=4 και M=2, τότε U=2ε και οι μικροκαταστάσεις του συστήματος είναι συνολικά 10.

Αυτές μπορούν να καταγραφούν με βάση την ενέργεια του καθενός από τα τέσσερα άτομα ώστε συνδυαζόμενες μεταξύ τους να δίνουν συνολική ενέργεια 2ε. Πιο συγκεκριμένα έχουν ως εξής:

1) άτομο 1 με ενέργεια 2ε, άτομο 2, άτομο 3 και άτομο 4 το καθένα με ενέργεια 0.
2) άτομο 1 με ενέργεια ε, άτομο 2 με ενέργεια ε, άτομο 3 και άτομο 4 το καθένα με ενέργεια 0.
3) άτομο 1 με ενέργεια 0, άτομο 2 και άτομο 3 το καθένα με ενέργεια ε, άτομο 4 με ενέργεια 0.
4) άτομο 1 με ενέργεια 0, άτομο 2 με ενέργεια 2ε, άτομο 3 και άτομο 4 το καθένα με ενέργεια 0.
5) άτομο 1 με ενέργεια ε, άτομο 2 με ενέργεια 0, άτομο 3 με ενέργεια ε, άτομο 4 με ενέργεια 0.
6) άτομο 1 με ενέργεια 0, άτομο 2 με ενέργεια ε, άτομο 3 με ενέργεια 0, άτομο 4 με ενέργεια ε.
7) άτομο 1 και άτομο 2 το καθένα με ενέργεια 0, άτομο 3 με ενέργεια 2ε, άτομο 4 με ενέργεια 0.
8) άτομο 1 με ενέργεια ε, άτομο 2 και άτομο 3 το καθένα με ενέργεια 0, άτομο 4 με ενέργεια ε.
9) άτομο 1 και άτομο 2 το καθένα με ενέργεια 0, άτομο 3 και άτομο 4 το καθένα με ενέργεια ε.
10) άτομο 1, άτομο 2 και άτομο 3 το καθένα με ενέργεια 0, άτομο 4 με ενέργεια 2ε.