ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Σε κατάσταση θερμοχημικής (θερμοδυναμικής) ισορροπίας (ΘΔΙ), το ανοιχτό μακροσκοπικό σύστημα θα τείνει να μεγιστοποιήσει την εντροπία του S και να ελαχιστοποιήσει το γενικευμένο του δυναμικό Φ. Από τη θεμελιώδη ταυτότητα της θερμοδυναμικής, προκύπτει ότι για τη μεγιστοποίηση της S θα πρέπει (με $dS=0$) να είναι σταθερές η ενέργεια, το μέσο πλήθος σωματιδίων και οι εξωτερικές παράμετροι (πχ. όγκος) του συστήματος. Αντίστοιχα, για την ελαχιστοποίηση του Φ, θα πρέπει (με $d\Phi=0$) να είναι σταθερές η θερμοκρασία, το χημικό δυναμικό και οι εξωτερικές παράμετροί του.
Με χρήση αναπτύγματος Taylor 2^{ης} τάξης της S γύρω από S_0 (τιμή της S σε ΘΔΙ) και διαταραχή δP_R προκύπτει, με χρήση των παραπάνω αναγκαίων συνθηκών, ότι η S είναι μέγιστη σε κατάσταση ΘΔΙ.

ΘΕΜΑ 2

α) Αφού $\Omega=N!/(n_{-1}!n_0!n_1!)$, $S=K\ln\Omega=K[N\ln N-n_{-1}\ln n_{-1}-n_0\ln n_0-n_1\ln n_1]$ όπου K η σταθερά του Boltzmann
β) S=μέγιστη όταν $n_{-1}=n_0=n_1=N/3$ (προκύπτει και με μηδενισμό των μερικών παραγώγων της S ως προς δύο από τις τρεις παραπάνω παραμέτρους, με σταθερές τις υπόλοιπες)
$S_{max}=KN\ln 3$ με $\Omega=3^N$.

ΘΕΜΑ 3

α) Γενικά, $N_i/N_1=P_i/P_1$ όπου P_i (η αντίστοιχη πιθανότητα)$=g_ie^{-\beta\varepsilon i}/\zeta$
(για i=2,3,4). Επομένως:
$N_2/N_1=2e^{-\beta\varepsilon}$, $N_3/N_1=e^{-2\beta\varepsilon}/2$, $N_4/N_1=3e^{-3\beta\varepsilon}/2$, όπου $\beta=1/KT$
β) $\zeta=\Sigma g_ie^{-\beta\varepsilon i}$ (για όλα τα i), άρα $\zeta=e^{-\beta\varepsilon}(2+4e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+3e^{-3\beta\varepsilon})$
$Z=\zeta^N=[e^{-\beta\varepsilon}(2+4e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+3e^{-3\beta\varepsilon})]^N$
γ) $<\varepsilon>=\Sigma\varepsilon_iP_i$ (για όλα τα i). Επομένως:
$<\varepsilon>=\varepsilon[2+8e^{-\beta\varepsilon}+3e^{-2\beta\varepsilon}+12e^{-3\beta\varepsilon}]/[2+4e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+3e^{-3\beta\varepsilon}]$
$<E>=N<\varepsilon>=N\varepsilon[2+8e^{-\beta\varepsilon}+3e^{-2\beta\varepsilon}+12e^{-3\beta\varepsilon}]/[2+4e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+3e^{-3\beta\varepsilon}]$
δ) $C=(\partial<E>/\partial T)_{V,N}=K\beta^2N\varepsilon^2e^{-\beta\varepsilon}[8+8e^{-\beta\varepsilon}+60e^{-2\beta\varepsilon}+48e^{-3\beta\varepsilon}+3e^{-4\beta\varepsilon}]/[2+4e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+3e^{-3\beta\varepsilon}]^2$
ε) Για T<<, <E>=min=Nε ενώ για T>>, <E>=max=5Nε/2.

ΘΕΜΑ 4

α) $Z_G(T,M,\mu)=(1+e^{\beta\mu+\beta\varepsilon})^M$ (από το άθροισμα των παραγόντων Gibbs για n=0 και 1)

β) $\Phi=-KT\ln Z_G=-KTM\ln(1+e^{\beta\mu+\beta\varepsilon})$

γ) $\langle N\rangle=-(\partial\Phi/\partial\mu)_{T,V}=M/(1+e^{-\beta\mu-\beta\varepsilon})$ άρα $\langle N\rangle/M=1/(1+e^{-\beta\mu-\beta\varepsilon})$

δ) $F=-KT\ln Z=-NKT\{\ln(V/N)+\ln[(2\pi mKT)^{3/2}e/h^3]\}$(με χρήση της συνάρτησης Z του ιδανικού αερίου)

$\mu=(\partial F/\partial\langle N\rangle)_{T,V}=-KT\ln\{[(2\pi m)^{3/2}(KT)^{5/2}]/(Ph^3)\}$ (με χρήση της καταστατικής εξίσωσης του ιδανικού αερίου PV=NKT).

Για να υπάρχει θερμοχημική ισορροπία μεταξύ του ιδανικού αερίου και των ατόμων που καταλαμβάνουν το στερεό πλέγμα, πρέπει τα χημικά τους δυναμικά να είναι ίσα.

Από το ερώτημα γ με αντικατάσταση του μ από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι:

$\langle N\rangle/M=1/\{1+\{e^{-\beta\varepsilon}[(2\pi m)^{3/2}(KT)^{5/2}]/(Ph^3)\}\}$

ΘΕΜΑ 5

α) $E=5(2\pi m/h^2)VE_F^{13/5}/13$, όπου $E_F=\mu(T=0K)$

β) $n=N/V=5(2\pi m/h^2)E_F^{8/5}/8$

γ) Ποσοστό φερμιονίων με $E_F/3<E<3E_F/4=(3/4)^{8/5}-(1/3)^{8/5}\approx 46\%$

δ) Η T στην οποία μ=0 είναι η $T=[(5/8)^{5/8}T_F]/A^{5/8}$ όπου A είναι το (αριθμητικό) αποτέλεσμα του ολοκληρώματος $\int(y^{3/5}dy)/(1+e^y)$ με y=E/KT (και όρια 0, ∞).