<u>ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ-ΠΥΡΗΝΕΣ-ΣΩΜΑΤΙΑ</u>. **6^{O} ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.**

Στο 10^{o} μάθημα αναπλήρωσης («χαμένης» διδακτικής ώρας λόγω απεργιακής κινητοποίησης), βρήκαμε τους μετασχηματισμοί Lorentz, ορμής-ενέργειας, σκιαγραφώντας μια απόδειξη στην οποία χρησιμοποιήθηκε η έννοια του τετραδιανύσματος, με πιο αντιπροσωπευτικά τα 4-διανύσματα θέσης-χρόνου $(ct,-x,-y,-z)$ και ορμής-ενέργειας $(E/c,-p_x,-p_y,-p_z)$. Στις δυο πρώτες ασκήσεις του σετ6 παρουσιάζουμε δύο επιπλέον μεθόδους απόδειξης. Και οι δύο αποδείξεις στηρίζονται στις σχέσεις ορισμού της ενέργειας $E=mc^2\gamma$ και της ορμής $p_{x,y,z}=mv_{x,y,z}\gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 1 *Μετασχηματισμοί Lorentz, ορμής-ενέργειας.* Οι σχέσεις ορισμού της ορμής και της ενέργειας μπορούν να γραφούν και με την μορφή, $p_{x,y,z}=mv_{x,y,z}\gamma=m\dfrac{dx,dy,dz}{dt}\gamma=m\dfrac{dx,dy,dz}{d\tau}$ και $E=mc^2\gamma=mc^2\dfrac{dt}{d\tau}$, όπου το $d\tau$ περιγράφει απειροστή μεταβολή του ιδιοχρόνου (θυμηθείτε την διαστολή του χρόνου $t=\gamma\tau\Rightarrow dt=\gamma\,d\tau$). Χρησιμοποιείστε τις παραπάνω σχέσεις για να βρείτε τους μετασχηματισμούς ενέργειας-ορμής.

Απ. Όλοι οι παρατηρητές συμφωνούν για την τιμή του ιδιοχρόνου, είναι ο χρόνος όπως μετριέται από ένα Σ.Α. που συνοδεύει το σωμάτιο συγκεκριμένης ορμής και ενέργειας). Ο χρόνος αυτός λοιπόν είναι ίδιος σε όλα τα Σ.Α., άρα είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα. Οπότε πρακτικά οι ορμές ακολουθούν τους μετασχηματισμούς θέσης και η ενέργεια τους μετασχηματισμούς του χρόνου.

Δηλαδή $E'=mc^2\dfrac{dt'}{d\tau}=mc^2\dfrac{\gamma(dt-vdx/c^2)}{d\tau}=\gamma(mc^2\dfrac{dt}{d\tau}-vm\dfrac{dx}{d\tau})=\gamma(E-vp_x),$ και

$$p_x'=m\frac{dx'}{d\tau}=m\frac{\gamma(dx-vdt)}{d\tau}=\gamma(m\frac{dx}{d\tau}-(\frac{v}{c^2})mc^2\frac{dt}{d\tau})=\gamma(p_x-\frac{v}{c^2}E).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 *Μετασχηματισμοί Lorentz, ορμής-ενέργειας.* Ξεκινώντας από τις σχέσεις ορισμού της ορμής και της ενέργειας, και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων βρείτε μετασχηματισμοί Lorentz, ορμής-ενέργειας.

Απ. Στο Σ.Α. S οι σχέσεις ορισμού γράφονται $E=mc^2\gamma(u)$ και $p_x=mu\gamma(u)$, ενώ στο Σ.Α. S' οι σχέσεις ορισμού γράφονται $E'=mc^2\gamma(u')$ και $p_x'=mu'\gamma(u')$. Έστω ότι το Σ.Α. S' κινείται με ταχύτητα *w* σε σχέση με το Σ.Α. S. Τότε από τους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων έχουμε,

$$\beta_{u'}=\frac{\beta_u-\beta_w}{1-\beta_u\beta_w}\Rightarrow\gamma(u')^{-1}=\sqrt{1-\beta_{u'}^2}=\sqrt{1-\frac{(\beta_u-\beta_w)^2}{(1-\beta_u\beta_w)^2}}=\frac{\sqrt{1-\beta_u^2}\sqrt{1-\beta_w^2}}{(1-\beta_u\beta_w)}=\frac{\gamma(u)^{-1}\gamma(w)^{-1}}{(1-\beta_u\beta_w)}\Rightarrow\gamma(u')=\gamma(u)\gamma(w)(1-\beta_u\beta_w).$$

Οπότε για την ενέργεια, $E'=mc^2\gamma(u')=mc^2\gamma(u)\gamma(w)(1-\beta_u\beta_w)=\gamma(w)(mc^2\gamma(u)-mc^2\gamma(u)\beta_u\beta_w)=\gamma(w)(E-wp_x).$

Ανάλογα δουλεύουμε για την ορμή.

ΑΣΚΗΣΗ 3 *Εξίσωση κίνησης σωματιδίου.* Θεωρούμε σωματίδιο μάζας ηρεμίας *m* του οποίο εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης $x(t)=x_0+\sqrt{a+bt^2}$, να βρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την ταχύτητα του σωματιδίου, η δύναμη που προκαλεί αυτή την κίνηση και η έκφραση για την συνολική ενέργεια του σωματιδίου. Να εκτιμήσετε τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος (x_0, a και b) χρησιμοποιώντας φυσικά επιχειρήματα.

Απ. Έχουμε

$$x(t)\text{-}x_0=\sqrt{a+bt^2}\Rightarrow(x-x_0)^2=a+bt^2\Rightarrow2(x-x_0)dx=2btdt\Rightarrow(x-x_0)(dx/dt)=bt\Rightarrow(x-x_0)u=bt\Rightarrow u(t)=\frac{bt}{\sqrt{a+bt^2}}.$$

Μάλιστα από την οριακή τιμή της ταχύτητας μπορούμε να εκτιμήσουμε το *b*, $u(t\to\infty)=lim\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a}{t^2}+b}}=\sqrt{b}=c\Rightarrow b=c^2.$

Οπότε $\dfrac{u^2}{c^2}=\dfrac{c^2t^2}{a+c^2t^2}\Rightarrow1-\dfrac{u^2}{c^2}=\dfrac{a}{a+c^2t^2}\Rightarrow\gamma=\dfrac{\sqrt{a+c^2t^2}}{\sqrt{a}}=\dfrac{(x-x_0)}{\sqrt{a}}$ και $p=mu\gamma=\dfrac{mu(x-x_0)}{\sqrt{a}}=\dfrac{mc^2t}{\sqrt{a}}\Rightarrow\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{mc^2}{\sqrt{a}}=F.$

Δηλαδή η δύναμη που προκαλεί την κίνηση που περιγράφει η δοθείσα εξίσωση κίνησης είναι μια <u>*σταθερή δύναμη*</u>.

Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε άλλη μια παράμετρο της κίνησης, δηλαδή

$\dfrac{mc^2}{\sqrt{a}}=F\Rightarrow a=\dfrac{m^2c^4}{F^2}$ και η εξίσωση κίνησης γράφεται $x(t)\text{-}x_0=\dfrac{mc^2}{F}\sqrt{1+(\dfrac{Ft}{mc})^2}$. Αν μάλιστα θεωρήσουμε Σ.Α. για το οποίο έχουμε μηδενική αρχική θέση, παίρνουμε $x(0)=x_0+\dfrac{mc^2}{F}=0\Rightarrow x_0=-\dfrac{mc^2}{F}$ και $x(t)=\dfrac{mc^2}{F}(\sqrt{1+(\dfrac{Ft}{mc})^2}-1)$.

Η έκφραση για την ταχύτητα παίρνει την μορφή $u(t)=\dfrac{Ft}{m\sqrt{1+(\dfrac{Ft}{mc})^2}}$ ενώ ισχύει και η απλή γραμμική σχέση

$p=\dfrac{mu(x-x_0)}{\sqrt{a}}=Ft$ για την ορμή. Τέλος η ενέργεια δίνεται από τον τύπο $E=mc^2\gamma=mc^2\dfrac{x}{\sqrt{a}}=Fx=mc^2\sqrt{1+(\dfrac{Ft}{mc})^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4α *Εξίσωση κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε σταθερό διάμηκες ηλεκτρικό πεδίο.* Θεωρούμε ακίνητο αρχικά σωματίδιο μάζας ηρεμίας *m* και φορτίου *q* που τοποθετείται μέσα σε σταθερό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, $\varepsilon\hat{x}$. Να μελετηθεί η κίνησή του.

Απ. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από την εξίσωση $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dm\gamma\vec{u}}{dt}=m\frac{d\gamma\vec{u}}{dt}=m\frac{d\gamma(u_x\hat{x}+u_y\hat{y})}{dt}=\vec{F}=q\varepsilon\hat{x}$, που δίνει δύο εξισώσεις τις $\frac{dp_x}{dt}=m\frac{d\gamma u_x}{dt}=q\varepsilon$ και $\frac{dp_y}{dt}=m\frac{d\gamma u_y}{dt}=0$ με $\gamma^{-2}=1-\frac{(u_x^2+u_y^2)}{\mathrm{c}^2}$.

Από την $\frac{dp_y}{dt}=m\frac{d\gamma u_y}{dt}=0$ βρίσκουμε ότι $u_y=0$ αφού έχουμε ως αρχική συνθήκη την $p_y(0)=0$. Οπότε η άλλη εξίσωση $\frac{dp_x}{dt}=m\frac{d\gamma u_x}{dt}=q\varepsilon\Rightarrow m\gamma u_x=q\varepsilon t\Rightarrow m\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{\mathrm{c}^2}}}=q\varepsilon t$ δίνει $u_x=\frac{\frac{q\varepsilon t}{m}}{\sqrt{1+(\frac{q\varepsilon t}{m\mathrm{c}^2})^2}}$ (και για αυτή την συνιστώσα έχουμε αρχική συνθήκη $p_x(0)=0$. Η σχέση αυτή προκύπτει από τον τύπο της ταχύτητας της προηγούμενης άσκησης με σταθερή δύναμη $F=q\varepsilon$. Προφανώς ισχύουν όλες οι σχέσεις, για την θέση, ορμή και ενέργεια της προηγούμενης άσκησης, με την αντικατάσταση $F=q\varepsilon$. Τέλος για μεγάλους χρόνους, δηλαδή $\frac{Ft}{m\mathrm{c}}\gg 1$ ισχύει η απλή γραμμική σχέση $E=p\mathrm{c}$ που ισχύει για τα φωτόνια.

ΑΣΚΗΣΗ 4β *Εξίσωση κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε σταθερό διάμηκες ηλεκτρικό πεδίο.* Θεωρούμε σωματίδιο μάζας ηρεμίας *m* και φορτίου *q* που τοποθετείται μέσα σε σταθερό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, $\varepsilon\hat{x}$. Να μελετηθεί η κίνησή του, αν $(p_x(0),p_y(0))=(0,p_0)$.

Απ. Έχουμε $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dp_x}{dt}\hat{x}+\frac{dp_y}{dt}\hat{y}=\vec{F}=q\varepsilon\hat{x}\Rightarrow\frac{dp_x}{dt}=q\varepsilon,\frac{dp_y}{dt}=0\Rightarrow p_x=q\varepsilon t,p_y=p_0$, και για την ολική ενέργεια του σωματίου $E=\sqrt{m^2\mathrm{c}^4+(p_x^2+p_y^2)\mathrm{c}^2}=\sqrt{m^2\mathrm{c}^4+(p_0^2+(q\varepsilon t)^2)\mathrm{c}^2}$. Τέλος οι ταχύτητες μπορούν να βρεθούν από την σχέση $\vec{u}=\vec{p}\mathrm{c}^2/E\Rightarrow(u_x,u_y)=\ q\varepsilon\mathrm{c}t,p_0\mathrm{c}\ \ /\sqrt{m^2\mathrm{c}^2+(p_0^2+(q\varepsilon t)^2)}$.

Οι ταχύτητες φυσικά μπορούν να βρεθούν και από τις εξισώσεις $\frac{dp_x}{dt}=m\frac{d\gamma u_x}{dt}=q\varepsilon$ και $\frac{dp_y}{dt}=m\frac{d\gamma u_y}{dt}=0$ με $\gamma^{-2}=1-\frac{(u_x^2+u_y^2)}{\mathrm{c}^2}$ και τις αρχικές συνθήκες, αλλά έχουμε πολλές αλγεβρικές πράξεις.

ΑΣΚΗΣΗ 4γ Θεωρούμε σωματίδιο μάζας ηρεμίας *m* και φορτίου *q* που τοποθετείται μέσα σε σταθερό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, $\varepsilon\hat{x}$. Να μελετηθεί η κίνησή του αν $(u_x(0),u_y(0))=(\mathrm{u}_{x0},\mathrm{u}_{y0})$.

ΑΣΚΗΣΗ 4΄ *Εξίσωση κίνησης σωματιδίου στο οποίο ασκείται σταθερή δύναμη.* Ας μελετήσουμε την πιο γενική περίπτωση με δύναμη $\vec{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$ (όπου όλες οι συνιστώσες είναι σταθερές) και αρχική συνθήκη $(p_x(0),p_y(0),p_z(0))$.

Απ. Έχουμε $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dp_x}{dt}\hat{x}+\frac{dp_y}{dt}\hat{y}+\frac{dp_z}{dt}\hat{z}=\vec{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}\Rightarrow\frac{dp_i}{dt}=F_i\Rightarrow p_i(t)=F_it+p_i(0),\ \ i=x,y,z$, οπότε η ολική ενέργεια είναι $E=\sqrt{m^2\mathrm{c}^4+(p_x^2+p_y^2+p_z^2)\mathrm{c}^2}=\sqrt{m^2\mathrm{c}^4+(F_xt+p_x(0))^2\mathrm{c}^2+(F_yt+p_y(0))^2\mathrm{c}^2+(F_zt+p_z(0))^2\mathrm{c}^2}$. Οι ταχύτητες βρίσκονται από την σχέση $\vec{u}=\frac{\vec{p}\mathrm{c}^2}{E}\Rightarrow u_i=\frac{F_it+p_i(0)}{\sqrt{m^2+\left[(F_xt+p_x(0))^2+(F_yt+p_y(0))^2+(F_zt+p_z(0))^2\right]/\mathrm{c}^2}},\ \ i=x,y,z\cdot$

Η άσκηση 4$^{\alpha}$ είναι ειδική περίπτωση της 4΄ με $F_x=q\varepsilon,\ F_y=F_z=0$ και $p_x(0)=p_y(0)=p_z(0)=0$.

Η άσκηση 4$^{\beta}$ είναι ειδική περίπτωση της 4΄ με $F_x=q\varepsilon,\ F_y=F_z=0$ και $p_x(0)=p_z(0)=0,p_y(0)=p_0$.

Η άσκηση 4$^{\gamma}$ είναι ειδική περίπτωση της 4΄ με $F_x=q\varepsilon,\ F_y=F_z=0$ και $p_x(0)=m\mathrm{u}_{x0}\gamma(\mathrm{u}_{x0}),p_y(0)=m\mathrm{u}_{y0}\gamma(\mathrm{u}_{y0}),p_z(0)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5 *Εξίσωση κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.* Θεωρούμε σωματίδιο μάζας ηρεμίας *m* και φορτίου *q* και αρχικής ταχύτητας $\vec{u}(0)=u_0\hat{x}$ που τοποθετείται μέσα σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο, $B\hat{z}$. Αν δεχθούμε ότι η δύναμη που δέχεται το σωμάτιο είναι η δύναμη Lorentz, $\vec{F}=q\vec{u}\times\vec{B}$, να αποδείξετε ότι έχουμε ομαλή κυκλική κίνηση με κυκλική συχνότητα, $\omega=\frac{qB}{m}(1-\frac{u_0^2}{\mathrm{c}^2})^{1/2}$.

Απ. Έχουμε $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}=q\vec{u}\times\vec{B}\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p}=q\vec{p}\cdot\vec{u}\times\vec{B}=q\frac{E\vec{u}}{\mathrm{c}^2}\cdot\vec{u}\times\vec{B}=0\Rightarrow\frac{d\vec{p}\cdot\vec{p}}{dt}=\frac{dp^2}{dt}=0$, δηλαδή το p^2 είναι μια σταθερή ποσότητα και αφού $p^2=mu^2\gamma^2=\frac{mu^2}{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}$ και το u^2 είναι σταθερό. Έτσι ξέρουμε ότι έχουμε κίνηση με σταθερού μέτρου ταχύτητα. Η εξίσωση της κίνησης περιγράφεται από το $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}=q\vec{u}\times\vec{B}$.

Δουλεύοντας σε κυλινδρικές συντεταγμένες
$(\vec{r}=\rho\hat{e}_\rho+z\hat{z}\Rightarrow\vec{u}=\dot{\vec{r}}=\dot{\rho}\hat{e}_\rho+\rho\dot{\hat{e}}_\rho+\dot{z}\hat{z}=\dot{\rho}\hat{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi+\dot{z}\hat{z}\Rightarrow\dot{\vec{u}}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi+\ddot{z}\hat{z})$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}=q\vec{u}\times\vec{B}\Rightarrow\frac{m}{q\sqrt{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}}((\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi+\ddot{z}\hat{z})=(\dot{\rho}\hat{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi+\dot{z}\hat{z})\times B\hat{z}=(\rho\dot{\varphi}B\hat{e}_\rho-\dot{\rho}B\hat{e}_\varphi+0\hat{z}),$$

δηλαδή τις εξισώσεις $\frac{m}{q\sqrt{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}}(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=\rho\dot{\varphi}B,\ \ \frac{m(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})}{q\sqrt{1-\frac{u^2}{\mathrm{c}^2}}}=-\dot{\rho}B$ και $\ddot{z}=0$, μια λύση (είναι και η μοναδική;) που ανιχνεύεται εύκολα είναι η $\ddot{z}=0\Rightarrow$ $\dot{z}(t)=\dot{z}(0)=0\Rightarrow z(t)=z(0)$ και $\dot{\rho}=\ddot{\rho}=\ddot{\varphi}=0$, άρα $\frac{m}{q\sqrt{1-\frac{u_0^2}{\mathrm{c}^2}}}(\dot{\varphi})=B\Rightarrow\omega=\frac{Bq}{m}\sqrt{1-\frac{u_0^2}{\mathrm{c}^2}}$.

Καλές Πασχαλινές διακοπές. Πάτρα 1/4/18, Αντρέας. Φ. Τερζής