ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Σε πολλά πειράματα υπάρχει μία γραμμική σχέση ανάμεσα στα μετρούμενα μεγέθη. Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός σώματος το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση, μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, εφόσον αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα. Τοποθετώντας τα σημεία σε ένα διάγραμμα, βλέπουμε ότι αυτά προσεγγίζουν μία ευθεία γραμμή. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την κλίση της ευθείας η οποία προσεγγίζει περισσότερο αυτά τα σημεία, και το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα y (τεταγμένη). Σε κάθε περίπτωση, δεν περιμένουμε η ευθεία να διέρχεται από όλα τα σημεία, λόγω της παρουσίας τυχαίων σφαλμάτων. Μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικές τιμές τόσο για την κλίση όσο και για την τεταγμένη, εάν σχεδιάσουμε μία ευθεία η οποία να διέρχεται ανάμεσα από τα διεσπαρμένα σημεία. Η ακριβέστερη όμως μέθοδος για να το πετύχουμε αυτό είναι η *μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων*.

Έστω λοιπόν ότι τα σημεία μας ακολουθούν μία κανονική γκαουσιανή κατανομή. Έστω επιπλέον ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής x, οι αντίστοιχες τιμές του y κατανέμονται γύρω από μία μέση τιμή με κάποια απόκλιση. Παρά το γεγονός ότι για κάθε τιμή του x θα υπάρχει μία διαφορετική τιμή του y, υποθέτουμε ότι η απόκλιση των τιμών του y είναι η ίδια για κάθε τιμή του x.

Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή ευθεία είναι η παρακάτω: Εάν δεν υπάρχουν καθόλου τυχαία σφάλματα, όλες οι πειραματικές τιμές του y θα βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή με εξίσωση

$$y = mx + b\,.$$

Για μία δεδομένη τιμή του x (την οποία θα συμβολίζουμε με x_i), η αντίστοιχη τιμή του y (η οποία συμβολίζεται με y_i) θα διαφέρει από την ιδανική τιμή, η οποία δεν περιέχει σφάλμα, κατά μία ποσότητα

$$y_i - (mx_i + b)$$

Βασιζόμενοι στα μαθηματικά της γκαουσιανής κατανομής, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να πάρει το y αυτή την τιμή είναι

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - (mx_i + b))^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Η συνολική πιθανότητα για όλες τις τιμές του y δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων. Εάν έχουμε συνολικά *N* πειραματικές τιμές του y, η συνολική πιθανότητα είναι

$$P_i = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{\sum -\frac{(y_i-(mx_i+b))^2}{2\sigma^2}}.$$

Στη συνέχεια προσπαθούμε να βρούμε τις τιμές της κλίσης *m* και της τεταγμένης *b* για τις οποίες η παραπάνω πιθανότητα γίνεται μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν ο εκθέτης της παραπάνω παράστασης παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των μετρήσεών μας είναι ελάχιστο. Με βάση τα παραπάνω, παίρνουμε τις τιμές του *m* και του *b,* οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις

$$m = \frac{N\sum(x_i y_i) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{N\sum\left(x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

και

$$b = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{N}$$

Όπως φαίνεται, οι υπολογισμοί για τον προσδιορισμό του *m* και του *b* είναι αρκετά κουραστικοί, ακόμα και για έναν μικρό αριθμό μετρήσεων. Ένας εύκολος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να βρούμε την καλύτερη ευθεία είναι να κάνουμε το γράφημα των μετρήσεών μας με το πρόγραμμα Microsoft Excel και στη συνέχεια να προσθέσουμε μία γραμμή τάσης (trendline). (Βλέπε *ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ-Παράδειγμα με Excel)).*